Visoka poslovna škola
strukovnih studija
LESKOVAC

Висока пословна школа
струковних студија
ЛЕСКОВАЦ

STATISTIKA U EKONOMIJI I POSLOVANJU SA ZBIRKOM REŠENIH ZADATAKA

dr Milena Marjanović, prof
dr Ivan Mihailović, prof
Kristina Spasić, M.Sc.

Leskovac, 2016.

Nastavno naučno veće Visoke poslovne škole strukovnih studija Leskovac je na svojoj sednici održanoj 29.9.2016.godine usvojilo knjigu „Statistika u ekonomiji i poslovanju sa zbirkom rešenih zadataka" kao udžbenik

VISOKA POSLOVNA ŠKOLA STRUKOVNIH STUDIJA
LESKOVAC

STATISTIKA U EKONOMIJI I POSLOVANJU SA ZBIRKOM REŠENIH ZADATAKA

dr Milena Marjanović, prof.

dr Ivan Mihailović, prof.

Kristina Spasić, M.Sc.

Leskovac, 2016

STATISTIKA U EKONOMIJI I POSLOVANJU SA ZBIRKOM REŠENIH ZADATAKA

dr Milena Marjanović, prof.
dr Ivan Mihailović, prof.
Kristina Spasić, M.Sc.

Izdavač:
VISOKA POSLOVNA ŠKOLA STRUKOVNIH STUDIJA LESKOVAC

Urednik publikacije:
mr Dragan Stojanović, predavač

Recenzenti:
Prof. dr Milutin Đuričić
Prof. dr Vasko Rečkoski

Štampa:
SCERO-print - Niš

Tiraž:
160

ISBN:
978-86-84331-60-3

SADRŽAJ

PREDGOVOR

„Statistika u ekonomiji i poslovanju sa zbirkom rešenih zadataka” namenjena je, pre svega, studentima Visoke poslovne škole strukovnih studija u Leskovcu kao deo literature za pripremu ispita iz Poslovne statistike. Knjiga u čijem sastavu je zbirka, pisana je u skladu sa nastavnim planom i programom za predmet Poslovna statistika. U knjizi su obrađene odabrane statističke metode. Savremeni uslovi poslovanja nameću obavezu poznavanja modernih statističkih metoda i analiza, njihovo razumevanje kao i tumačenje rezultata analize. Knjigu mogu koristiti i studenti srodnih visokoškolskih institucija društvenog usmerenja, ali i svi oni koji u istraživačkom radu imaju potrebe za metodama statističke analize.

Leskovac, 2016. godine — Autori

1.

Pojam statistike i njena primena u ekonomiji i poslovanju

Etape u statističkom istraživanju

Elementi statistike

Skup statističkih podataka

Pojam i vrste uzorka

Merne skale

Prikazivanje statističkih podataka

Tabelarno prikazivanje statističkih podataka

Grafičko prikazivanje statističkih podataka

POJAM STATISTIKE I NJENA PRIMENA U EKONOMIJI

Promene i pojave u okruženju čoveka utiču na njegovo ponašanje zbog čega on oseća potrebu da te promene i pojave prati, beleži, razmatra i objašnjava. Sa razvojem ljudskog društva menjao se i način posmatranja i prikazivanja tih pojava, pa su se razvili metodi za njihovu deskripciju.

Statistika je naučni metod koji se primenjuje sa svrhom opisivanja, procene i analize karakteristika grupa, bez identifikacije pojedinaca ili organizacija koje sačinjavaju takve grupe. Ona obuhvata postupke i procedure prikupljanja, kompilacije, obrade i analize podataka o svim grupama i razvoj sličnih metoda merenja, modela i statističkih klasifikacija u okviru uzorkovanja.[1]

Prema nekim autorima statistika je grana matematike koja preispituje načine procesuiranja i analize podataka. Ona obezbeđuje uputstva za prikupljanje i oblikovanje podataka u formu koja je pogodna za donošenje poslovnih odluka. Statistika se definiše i kao *numerička mera koja opisuje karakteristike uzorka*. [2]

Jedna od definicija statistike naglašava da je statistika nauka koja se bavi prikupljanjem, klasifikacijom i interpretacijom kvantitativnih podataka uz primenu teorije verovatnoće za analizu i procenu parametara populacije.[3]

Savremena statistika obezbeđuje kvantitativne metode i tehnike za potrebe empirijskih istraživanja. Ona sadrži metodologiju za merenje neizvesnosti i ispitivanje posledica uticaja te neizvesnosti na planiranje i tumačenje rezultata eksperimentisanja i posmatranja.[4]

Reč statistika potiče od latinske reči „*statisticus*“ što u prevodu znači *državni poslovi*.[5] U početku se statistika odnosila samo na numeričke podatke na osnovu kojih se može steći uvid u stanje pojava. U tom periodu obično se pratilo

---

[1] Kuebler, C., Mackie, C., 2006. *Improving Business Statistics Through Interagency Data Sharing : Summary of a Workshop,* National Research Council, USA, pp. 6.
[2] Berenson, M., Levine, M., Krehbiel, T., 2011. *Basic Business Statistics: Concepts and Applications,* 12th edition, Prentice Hall, New Jersey, pp. 3-4.
[3] Bradley, T., 2007. *Essential Statistics for Economics, Business and Management*, John Wiley & Sons, England, pp. 6.
[4] Wilcox, R., 2009. *Basic Statistics: Understanding Conventional Methods and Modern Insights,* Oxford University Press, New York, pp. 3.
[5] Bradley, T., 2007. *Essential Statistics for Economics, Business and Management*, John Wiley & Sons, England, pp. 1.

brojno stanje stanovnika, poreskih obveznika, imovine, vojnika i svega onog što je bilo primarno interesovanje tadašnjih vladara države.

Pre pet hiljada godina Sumeri su sprovodili statistiku stanovništva u poreske svrhe. Još davne 1660. godine nemački profesor Herman Konring (Hermann Conring) prvi je upotrebio reč „statistika” u svojim predavanjima.[6]

U Nemačkoj i Engleskoj dolazi do razvoja statistike kao *naučne discipline* razvojem dve statističke koncepcije u XVII veku. Dok engleska škola u svojoj koncepcija stavlja akcenat na razvoj i primenu matematičkih metoda u statistici, nemačka škola u svojoj koncepcija stavlja akcenat na razvoj metoda za deskcipciju pojava. Nakon razvoja teorije verovatnoće u XIX veku dolazi do razvoja novih statističkih teorija.

Predmet izučavanja statistike su masovne pojave čija je osnovna karakteristika varijabilnost. Varijabla predstavlja promenljive karakteristike atributa koji se razlikuju od osobe do osobe ili od pojave do pojave, dok su podaci vrednosti posmatranih promenljivih. Upravo varijabilnost pojave koja se ispoljava preko odstupanja vrednosti karakteristika izuzetnih slučajeva pojave od opštih karakteristika te pojave koje odražavaju pravilnost njenog manifestovanja predstavlja ono čime se statistika bavi.

Na osnovu definicija statistike i dostupnih informacija o razvoju statistike mogu se izdvojiti neke *faze u njenom razvoju*. Prva faza razvoja statistike odnosila bi se na prikupljanje podataka. U drugoj fazi razvoja dolazi do formiranja dva koncepta jer se razvija nemačka deskriptivna škola i engleska škola aritmetike. Pojave koje se javljaju nepredvidive su i to je uslovilo potrebu za njihovim predviđanjem, pa u trećoj fazi razvoja statistike dolazi do povezivanja statistike i verovatnoće. U četvrtoj fazi razvoja egzistira savremena statistika.

Statistika se može podeliti u dve celine:[7]

- *Deskriptivna statistika* čiji je zadatak sumiranje podataka u lako razumljivu celinu,

- *Statističko zaključivanje* koje podrazumeva izvođenje zaključka o skupu na osnovu uzorka podataka.

Na osnovu svega rečenog, možemo **definisati statistiku** kao naučni metod tumačenja varijacija posebnih karakteristika pojava koje su masovne na kvalitativan i kvantitativan način sve dok se nalaze u međusobnoj zavisnosti, bez obzira na to da li su te pojave u stanju kretanja ili mirovanja.

[6] John, V., decembar 1883. “The Term "Statistics”, *Journal of the Statistical Society of London*, Vol. 46, No. 4., pp. 658.

[7] Keller, G., 2014. *Statistics for Management and Economics, 10 th* Edition, Cengage Learning, USA, pp. 3-4.

Informacije koje obezbeđuje statistika nalaze primenu u sledećim oblastima poslovanja: *proizvodnja, računovodstvo, finansije, marketing, informacioni sistemi* i druge.[8]

Danas kada se vodi oštra konkurentska borba na tržištu proizvođači posebno nastoje da obezbede visok kvalitet svojih proizvoda, tako da statistika nalazi primenu u oblasti **kontrole kvaliteta proizvoda**. Rezultati procesa proizvodnje nadgledaju se raznovrsnim grafikonima. Najčešće se koriste kontrolne karte, grafikon toka procesa i slično. Ovi grafikoni pružaju informaciju o tome kada je potrebno izvršiti korekcije procesa zbog toga što njihovi rezultati nisu ostali u unapred predviđenim granicama, pa su ti procesi van kontrole.

Statističke informacije imaju veliki značaj i primenu **u finansijskoj oblasti**. One doprinose boljem donošenju investicionih odluka kao što su kupovina, čuvanje ili prodaja određenih vrsta hartija od vrednosti. Kada je u pitanju razmatranje ulaganja finansijskih sredstava u različite vrste akcija, analiza se zasniva na upoređivanju finansijskih podataka kao što su P/E racio i prihodi od dividende. Analiza informacija o kretanju pomenutih pokazatelja na tržištu i upoređivanje istih sa pokazateljima koji se odnose na sopstvene akcije omogućava da se utvrdi da li je odluka da se ulože finansijska sredstva u kupovinu baš tih akcija bila ispravna.

Statistika se koristi i u **računovodstvu** i **reviziji**. Računovodstvene operacije vrše se sa velikim brojem podataka koje je neophodno upoređivati i tu statistika dolazi do izražaja. Takođe, veliki obim podataka kojima raspolaže računovodstvo iziskuje dosta vremena prilikom njihove provere tako da osoblje revizije uzima uzorak računa čiju ispravnost i tačnost proverava. Na osnovu pregledanog uzorka podataka revizori donose zaključak o verodostojnosti informacija prezentovanih u finansijskim izveštajima.

Statistika nalazi primenu i u oblasti **marketinga**. Uporednom analizom podataka o promotivnim aktivnostima po različitim prodajnim objektima može se uočiti zavisnost između promotivnih aktivnosti i prodaje. Promotivne aktivnosti mogu biti raznovrsne: posebne cene, mogućnost probe proizvoda u prodavnicama i slično. Prilikom formulisanja marketing strategija veoma je važno izvršiti prethodno pomenutu analizu.

Statističke informacije korisne su za prognoziranje brojnih agregatnih ekonomskih pokazatelja razvijenosti jedne zemlje. **Ekonomisti** koriste statističke informacije i predviđaju stopu zaposlenosti i nezaposlenosti, stepen iskorišćenja proizvodnih kapaciteta, a na osnovu Indeksa potrošačkih cena prognozira se kretanje stope inflacije.

[8] Anderson, D., Sweeney, D., Williams, T., Camm, J., Cochran, J., 2015. *Statistics for Business & Economics, 12th Edition,* Cengage Learning, USA, pp. 4-5.

ETAPE U STATISTIČKOM ISTRAŽIVANJU

Svrha **statističkog istraživanja** je da se dobiju informacije i/ili da se istraže karakteristike populacije. Statističko istraživanje ponavlja se konstantno u etapama. Reč je o veoma složenom i obimnom poslu gde posebno treba obratiti pažnju na:[9]

- *Dizajn*, odnosno, treba isplanirati i osmisliti postupak sprovođenja istraživanja;
- *Opis*, odnosno, neophodno je opisati sve postupke koji će se koristiti za sumiranje podataka;
- *Zaključak*, odnosno, predviđanja i izvođenje zaključka o skupu podataka na osnovu dostupnog uzorka posmatranja.

Da bi se sprovelo statističko istraživanje najpre je neophodno *odabrati statistički uzorak.*

U narednoj fazi se vrši *statističko posmatranje*. U ovoj fazi se prikupljaju podaci o pojavi koja je predmet ispitivanja.

Sledeća faza odnosi se na *sređivanje, grupisanje, kontrolisanje i prikazivanje* tako grupisanih *podataka*.

Poslednja faza sastoji se od *analize* prethodno grupisanih podataka i *tumačenje dobijenih rezultata* analize.

Na osnovu ovako sprovedenog statističkog istraživanja dobijaju se rezultati koji se pripisuju celoj populaciji bez obzira što je istraživanje izvršeno na bazi uzorka te populacije.

Da bi statističko istraživanje bilo kvalitetno sprovedeno neophodno je definisati cilj i predmet istraživanja.

Cilj istraživanja mora biti precizan i jasno definisan, konkretan i realan da bi istraživanje moglo uspešno da se isplanira.

Cilj istraživanja direktno uslovljava **predmet istraživanja.** U skladu sa definicijom statistike predmet statističkog istraživanja je masovna pojava koja je određena nekim kriterijumima. Najpre je važno definisati varijable koje će biti

[9] Wilcox, R., 2009. *Basic Statistics: Understanding Conventional Methods and Modern Insights,* Oxford University Press, New York, pp. 5.

predmet istraživanja.

Prema kriterijumu obuhvatnosti statističko posmatranje može biti *potpuno* i *delimično*.

Kao **metodi potpunog statističkog posmatranja** izdvajaju se *statistički popis* i *izveštajni metod.*[10]

Statistički popis predstavlja metod statističkog posmatranja kod koga se svaka jedinica skupa posmatra u određenom vremenskom razdoblju ili kritičnom momentu. Ovaj metod se primenjuje kada je proučavana pojava u najmanjem kretanju. Pogodan je za primenu kod obimnih i relativno stabilnih pojava. Zahvaljujući primeni ovog metoda moguće je steći uvid u celokupnu strukturu skupa, ali njegova primena zahteva mnogo vremena i troškova.

Za razliku od statističkog popisa izveštajnim metodom neprekidno se prate događaji čiji je varijabilitet jače izražen tokom vremena. Primenom ovog metoda mogu se dobiti informacije o stanju, ali i o kretanju određene posmatrane pojave. Metod statističkog izveštaja koriste lica ili organizacije za svoje poslovne potreba i onu šalju svoje statističke izveštaje statističkim organima u predviđenom vremenskom periodu.

Delimično statističko posmatranje sprovodi se na osnovu uzorka. Ovaj metod posmatranja koristi se kao zamena za prethodne dve metode.

Izvori podataka mogu biti *primarni* i *sekundarni*.[11] Primarni izvor podataka predstavlja sam istraživač koji prikuplja podatke za svoje istraživanje. Ovde je reč o neposrednom prikupljanju podataka. Kada se podaci prikupljaju neposredno iz već postojećih evidencija i dokumentacije tada je reč o sekundarnim izvorima podataka.

Podatke mogu distribuirati organizacije ili pojedinci, do njih se može doći putem eksperimenata, na osnovu sprovođenja opservacione analize ili na osnovu odgovora iz anketa (na osnovu upitnika). Ove podatke je prikupila neka druga osoba ili organizacija.

Sredstvo koje se najčešće koristi za prikupljanje podataka je statistički upitnik. Upitnik sadrži dovoljno jasnih i konciznih pitanja sa prostorom za upisivanje odgovora anketiranih. Postoje različite vrste upitnika. Osnovna podela je na individualne i kolektivne upitnike.

Prilikom sprovođenja statističkog istraživanja treba biti oprezan zbog moguće pojave **grešaka**. Greške koje se ovde javljaju mogu biti **slučajne** i one se međusobno poništavaju, dok se **sistematske** greške ne mogu zanemariti jer značajno utiču na rezultate istraživanja. Sistematske greške zavređuju posebnu

[10] Šekarić, M., 2010. *Statističke metode*, Univerzitet Singidunum, Beograd, str, 5.
[11] Berenson, M., Levine, M., Krehbiel, T., 2011. *Basic Business Statistics: Concepts and Applications,* 12th edition, Prentice Hall, New Jersey, pp. 6.

pažnju i moraju se na neki način otkloniti. Da bi se greške otklanjale u hodu neophodno je sprovesti samokontrolu i reviziju. Pored toga, od značaja je kontrola na terenu preko pratnje, naknadna kontrola na terenu (reintervju), kao i kontrola sa mini pitanjima preko pošte ili kontrola pomoću anketara za istraživanje preko pošte

ELEMENTI STATISTIKE

SKUP STATISTIČKIH PODATAKA

Statistički skup čine svi članovi grupe nad kojom želimo vršiti određene analize kako bi došli do potrebnih rezultata. On ne mora da se odnosi na grupu ljudi, već ga mogu činiti svi objekti ili životinje koji su relevantni za konkretno istraživanje. Statistički skup mogu činiti:

- Svi stanovnici na teritoriji jedne države;
- Ukupan broj računara u jednoj zemlji;
- Ukupan broj dece u Jablaničkom okrugu;
- Ukupan broj divljih životinja na teritoriji Južne Srbije i drugo.

„Statistički skup ili populacija je onaj skup na čijim elementima merimo jedno ili više obeležja čije vrednosti variraju od elementa do elementa posmatranog skupa."[12]

Na osnovu brojnih definicaja možemo slobodno definisati statistički skup kao skup elemenata, individua, živih bića, slučajeva, predmeta, pojava, događaja koji postoje istovremeno ili se ponavljaju i vezani su nekom opštom zajedničkom vezom.

Izbor statističkog skupa nije jednostavan posao i zavisi od samog problema istraživanja, prirode pojave, raspoloživih metoda opservacije i od samog cilja istraživanja. Osnovne karakteristike skupa su da je on celovit, homogen i diferenciran.

[12] Vuković, N., Spasić, S., 2011. *Statistika za inžinjere*, Univerzitet Singidunum, Beograd, str. 2.

Celovitost statističkog skupa ogleda se u tome da je to skup svih individualnih slučajeva posmatrane pojave u prostoru i vremenu.

Da bi statistički skup bio homogen elementi koji ga čine moraju imati makar jednu zajedničku karakteristiku. Na primer, stanovnici Republike Srbije bez obzira na razlike u polovima, nacionalnoj pripadnosti, godinama i slično imaju zajedničku karakteristiku, a to je da su stanovnici Republike Srbije.

Elementi statističkog skupa moraju biti istovrsni, ali ne i istovetni da bi taj skup bio diferenciran. Ukoliko se oslonimo na prethodni primer za homogen skup, možemo reći da prethodno naveden skup čine istovrsne i neistovetne jedinice jer se stanovnici razlikuju po polu, nacionalnoj pripadnosti i slično. Dakle, moramo izvršiti diferencijaciju homogenog skupa po odgovarajućim kriterijumima. Elementi skupa moraju imati bar jednu varijabilnu karakteristiku prema kojoj se razlikuju.

Statistički skup mora biti određen *prostorno*, *vremenski* i *sadržinski.*

Skup je određen sadržinski onda kada se jasno definišu osobine koje mora imati svaka jedinica ili element skupa po osnovu kojih je i uključena u taj skup. On je vremenski određen ukoliko precizno definišemo vremenski period ili momenat u kojem će se vršiti statističko posmatranje elemenata osnovnog skupa. Na primer, možemo posmatrati elemente nekog skupa od 01.02.2016. godine do 01.03.2016. godine, ili tačno određenog dana 15.03.2016. godine. Tek onda kada odredimo prostor na kome se nalaze elementi skupa koji su predmet statističkog posmatranja možemo reći da je statistički skup prostorno određen. Na primer, to može biti Jablanički okrug, Centralna Srbija, Autoput E-75 i drugo.

Jedinice ili elementi osnovnog skupa na kojima se vrši posmatranje razlikuju se međusobno prema određenim osobinama koje predstavljaju ***obeležja***.

Razlikujemo *kvantitativna (numerička) i atributivna (kvalitativna, kategorijska) obeležja.*[13]

Numerička obeležja predstavljaju takve karakteristike koje se mogu iskazati brojčano. Ukoliko se vrednosti obeležja dobijaju prebrojavanjem onda je reč o *prekidnim* numeričkim obeležjima i ona se izražavaju celim brojevima. Kada se vrednosti obeležja dobijaju na osnovu merenja onda su u pitanju *neprekidna* numerička obeležja i ona se iskazuju u mernim jedinicama. Na primer, prekidna obeležja mogu biti težina, visina, starost lica i drugo, dok neprekidna obeležja mogu biti broj dece, broj automobila i drugo.

Atributivna obeležja izražavaju se rečima i izražavaju kvalitativne razlike koje postoje kod jedinica posmatranja. Ova obeležja imaju različite

---

[13] Lovrić, M., 2008. *Osnovi statistike*, Ekonomski fakultet, Kragujevac, str. 15.

modalitete preko kojih se ispoljava njihova varijabilnost, na primer, pol: muško i žensko; školska sprema: osnovna, srednja, viša i visoka i drugo. U cilju brže obrade podataka kod atributivnih obeležja koristi se kodeks šifara.

Ponekad je teško precizno odrediti razliku između prekidnih i neprekidnih obeležja. Takođe, neka obeležja mogu biti iskazana nekada kao numerička, a nekada kao atributivna u zavisnosti od toga kako se zapisuju.

POJAM I VRSTE UZORKA

Uzorak predstavlja podskup skupa podataka. Reč je o izdvojenom delu osnovnog skupa za potrebe statističke analize. Na osnovu analize uzorka donose se zaključci o osobinama osnovnog skupa zbog čega je važno da uzorak bude reprezentativan. Samo onda kada uzorak svojim osobinama oslikava osobine osnovnog skupa iz kojeg je izdvojen možemo smatrati da je taj uzorak reprezentativan. Dakle, uzorak mora da zadovoljava sledeće *kriterijume*:[14]

- **Reprezentativnost** – svaki element skupa treba da ima podjednaku verovatnoću da se nađe u uzorku;
- **Brojnost** – da sadrži optimalan broj elemenata;
- **Objektivnost** – neophodno je odbaciti sve subjektivne faktore što se postiže primenom metoda slučajnog izbora podataka iz osnovnog skupa.

Prilikom uzorkovanja podataka iz osnovnog skupa koriste se metode uzorkovanja. Podaci iz osnovnog skupa mogu biti birani **nasumično** ili po metodu **namernog izbora**.[15]

Slučajni uzorci se još nazivaju i uzorcima verovatnoće. Kod slučajnog izbora podataka postoji jednaka verovatnoća da sve jedinice budu izabrane u uzorak. Na ovaj način zadovoljava se kriterijum reprezentativnosti uzorka. Jedinice osnovnog skupa biraju se nezavosno jedna od druge. Prednost slučajnih uzoraka je u tome što slučajan izbor podataka iz osnovne populacije smanjuje pristrasnost, ali njihov osnovni nedostatak je u tome što mogu biti dosta skupi i treba više vremena za primenu.

Osnovni skup iz kojeg se vrši izbor podataka na slučajan način može biti **konačan** i **beskonačan**. Od prirode osnovnog skupa zavisi pouzdanost

---

[14] Kovačević, Kostić, I., 2015. *Verovatnoća i statistika*, Univerzitet Singidunum, Beograd, str. 134-135.

[15] Bradley, T., 2007. *Essential Statistics for Economics, Business and Management*, John Wiley & Sons, England, pp. 9.

statističkog ocenjivanja. Kod beskonačnih skupova broj elemenata skupa ne može se precizno odrediti, dok se konačni skupovi sastoje od ograničenog broja elemenata.

Namerni uzorci biraju se prema ličnom nahođenju ispitivača. Istraživač navodi brojeve (kvote) koji omogućavaju izbor onih jedinica skupa koje, prema mišljenju ispitivača, adekvatno reprezentuju skup. Tako na primer, kvote mogu biti određene za zanimanje, pol, uzrast i drugo. U nastavku su navedene neke vrste namernih uzoraka:[16]

- Uzorci formirani na osnovu subjektivnog suda;
- Kvota-uzorci;
- Pogodni uzorci.

U slučaju kada imamo malo vremena na raspolaganju i kada je potrebno izdvojiti uzorak iz relativno malog skupa može se koristiti kvota-uzorak. Takođe, ova vrsta uzoraka nalazi primenu i u „pilot" istraživanjima.

Postoje različite vrste uzorka. Na bazi teorije verovatnoće razlikujemo:

- male uzorke ($n \leq 30$) i
- velike uzorke ($n > 30$).

Prilikom ocenjivanja parametara osnovnog skupa na bazi malih uzorka ($n \leq 30$) koristi se Studentov t raspored verovatnoće, dok se za velike uzorke ($n > 30$) t raspodela aproksimira sa normalnim.[17] Stepen pouzdanosti ocenjivanja zavisi od vrste odabranog uzorka. U statističkoj teoriji poznate su sledeće vrste uzoraka:

- prost slučajan uzorak,
- sistematski uzorak,
- sekvencijalni uzorak.
- stratifikovani uzorak,
- višefazni uzorak,
- višeetapni uzorak,
- panel uzorak i
- procesni uzorak.

Prost slučajan uzorak predstavlja osnovu za izučavanje svih drugih

[16] Đorđevic, V., 2006. *Statistika u ekonomiji*, Ekonomski fakultet, Niš, str. 7.
[17] Kovačević, Kostić, I., 2015. *Verovatnoća i statistika*, Univerzitet Singidunum, Beograd, str. 104.

vrsta uzoraka. On ima jednostavna teorijska svojstva i ne postoji međusobna zavisnost između izbora jedinica ovog skupa. Postupak izbora zasniva se na obeležavanju svake jedinice osnovnog skupa brojevima od 1 do N, a nakon toga se bira određeni broj jedinica primenom odabranog načina izbora. Prost slučajan uzorak može biti *sa ponavljanjem* i *bez ponavljanja*.

U slučaju kada jednom izvučena jedinica iz osnovnog skupa ne sme biti ponovo izvučena reč je o *prostom slučajnom uzorku bez ponavljanja*.

Prost slučajan uzorak bez ponavljanja podrazumeva da jednom izvučen element iz osnovnog skupa ne može više biti izvučen. Ovaj uzorak se najčešće koristi u praksi. Na osnovu sledećeg obrasca određuje se broj svih različitih uzoraka bez ponavljanja:

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!\,(N-n)}$$

Kada se bira prost slučajan uzorak sa ponavljanjem svaka jedinica osnovnog skupa koja je već izabrana vraća se u osnovni skup tako da može biti birana ponovo. Ukupan broj svih različitih uzoraka sa ponavljanjem je N^n.

Tablica slučajnih brojeva nalazi primenu prilikom izbora jedinica iz konačnih skupova. Brojevi od 0 do 9 prikazani su u 5 kolona i 5 redova, a početak izbora brojeva je proizvoljan.

Ukoliko je potrebno odabrati veliki broj jedinica osnovnog skupa primena tablice slučajnih brojeva usložnjava postupak jer je posao obima. U tom slučaju najbolje rešenje je koristiti *sistematski uzorak.* Kod ovog uzorka jedinice osnovnog skupa biraju se primenom koraka izbora *N : n*, gde je *N* broj elemenata osnovnog skupa, dok je *n* veličina uzorka. Primena pomenutog koraka izbora vrši se prilikom izbora drugog, trećeg,... n-tog elementa uzorka, dok se prvi element uzorka bira na slučajan način. Prednost sistematskog uzorka je u njegovoj jednostavnosti.

Sekvencijalni uzorak primenjuje se kada želimo oceniti da li neka pretpostavka može biti prihvaćena ili ne.

Stratifikovani uzorci se koriste sa ciljem da se poveća preciznost ocene. Ukoliko su nam poznate neke informacije o osnovnom skupu možemo ih iskoristiti za povećanje preciznosti ocene na bazi uzorka tako što ćemo osnovni skup podeliti na grupe (stratume) koje su interno homogene, a između sebe različite. Nakon toga se metodom slučajnog izbora iz svakog stratuma vrši izbor određenog broja jedinica u uzorak. Kod formiranja stratifikovanih uzoraka posebno je važno odrediti broj stratuma i način stratifikacije. Preporučljivo je da razlike između stratuma budu velike. U odnosu na prost slučajan uzorak ocenom starifikovanog uzorka donose se precizniji zaključci nego ocenom prostog slučajnog uzorka.

Višefazni uzorak koristi se kod posrednog statističkog istraživanja kada je skupo ispitivanje više obeležja koji nas interesuju. U zavisnosti od broja faza višefazni uzorak može biti: dvofazni, trofazni i višefazni uzorak.

Kada se izbor jedinica osnovnog skupa vrši po utvršenoj hijerarhiji reč je o *višeetapnom uzorku.* Primenom ove vrste uzorka smanjuju se troškovi i lakše se prikupljaju podaci. Postoje dvoetapni uzorak, troetapni uzorak, četvoroetapni uzorak i drugi.

Podaci o promenama karakteristika osnovnog skupa koje su predmet našeg interesovanja mogu biti prikupljani tokom vremena. Za prikupljanje ovih podataka koriste se *panel ankete* ili *panel uzorci*. Grupa anketiranih odabrana metodom slučajnog izbora daje podatke posredstvom upitnika. Panel uzorak omogućava praćenje razvojnih tendencija pojava i preduzimanje adekvatnih mera za usmeravanje ponašanja tih pojava.

Procesni uzorak predstavlja niz izlaza (outputa) koje proizvodi proces. U jednakim vremenskim razmacima izvlači se veći broj uzoraka koji trebaju biti iste veličine, pri čemu je važno da se promena karakteristike procesa koja je predmet posmatranja desi između uzoraka.

MERNE SKALE

Svaki nivo merenja ima posebnu skalu merenje. Svaka skala ima svoje jedinice mere. S obzirom na to da postoje četiri nivoa merenja razlikujemo **četiri merne skale**:[18]

- nominalna,
- ordinalna,
- intervalna i
- skala odnosa.

Nominalna skala je najmanje precizna skala. Kod ove skale razvrstavanje nivoa obeležja na određeni broj modaliteta vrši se pomoću brojeva. Na ovaj način se klasifikuju zanimanje, pol, bračni status i drugo. Ukoliko

[18] Anderson, D., Sweeney, D., Williams, T., Camm, J., Cochran, J., 2015. *Statistics for Business & Economics, 12th Edition,* Cengage Learning, USA, pp. 7.

postoje atributivne karakteristike one se označavaju slovima.

Kod *ordinalne skale* merenje modaliteta vrši se tako što se oni rangiraju prema značaju u odnosu na unapred definisane kriterijume. Kao primer možemo uzeti lokaciju autobuske stanice koja može biti nepovoljna, osrednja, izuzetno povoljna i drugo.

Intervalna skala ili kardinalna skala (jedinica za merenje temperature - Celzijusova i Farenhajtova skala) pokazuje redosled modaliteta kao i meru njihovog razlikovanja.

Skala odnosa pruža najviši nivo preciznosti merenja. Ona se koristi kod podataka kao što su visina u cm, telesna težina u kg i slično.

PRIKAZIVANJE STATISTIČKIH PODATAKA

Statističke serije predstavljaju niz brojčanih podataka o jednom ili više obeležja neke pojave.[19] Rezultati obrade podataka prikupljenih statističkim posmatranjem koji su predstavljeni u vidu sređenog niza podataka po obeležju čine **statističku seriju**. Statističke serije možemo podeliti u zavisnosti od broja obeležja na:

- proste statističke serije (iskazuju podatke samo po jednom obeležju) i
- složene statističke serije (iskazuju podatke o više obeležja pojave koja se posmatra).

Statističke serije mogu se podeliti u zavisnosti od toga kako su uređene vrste obeležja i prema tome šta pokazuju statističke serije na:[20]

- vremenske (hronološke),
- geografske serije i
- serije strukture.

Vremenska serija predstavlja uređeni niz opservacija.[21] Kod vremenskih

[19] Šekarić, M. 2010. *Statističke metode*, Univerzitet Singidunum, Beograd, str. 7.
[20] Šekarić, M. 2010. *Statističke metode*, Univerzitet Singidunum, Beograd, str. 7.
[21] Kovačić, Z., 1995. *Analiza vremenskih serija*, Ekonomski fakultet, Beograd, str. 3.

serija nizovi statističkih podataka pokazuju varijacije posmatranih pojava tokom vremena. Vremenske serije delimo na *prekidne* i *neprekidne*. Ukoliko u svakom trenutku možemo registrovati opservacije vremenske serije reč je o neprekidnim vremenskim serijama, na primer: cene, temperatura i drugo. Kada opservacije beležimo u istim vremenskim intervalima onda je reč o prekidnim vremenskim serijama. Na osnovu prekidne vremenske serije možemo dobiti neprekidnu vremensku seriju.

Prema prirodi podataka vremenske serije mogu biti:

- *momentne* – pokazuju stanje posmatrane pojave u precizno određenim sukcesivnim vremenskim momentima;
- *intervalne* – prikazuju statističke podatke prikupljene statističkim posmatranjem koje je vršeno u uzastopnim vremenskim intervalima pri čemu su podaci grupisani prema unapred definisanom vremenskom kriterijumu;
- *srednje* – pokazuju prosek grupisanih statističkih podataka u vremenskoj seriji izračunat na osnovu skupa podataka o posmatranom obeležju.

Teritorijalni raspored pojave prikazuje se pomoću *geografskih serija.* U pitanju su atributivne serije koje mogu biti:

- *nacionalne* koje pokazuju prostorni raspored pojave na nacionalnoj teritoriji;
- *međunarodne* koje pokazuju rasprostranjenost pojava u većem broju različitih zemalja.

Serije strukture daju prikaz rasporeda statističkih jedinica prema vrednostima obeležja ili prema modalitetima. Ove serije se sastoje od dve kolone obaveštenja. U prvoj koloni unose se modaliteti, a u drugoj koloni frekvencije, odnosno, učestalost javljanja svakog modaliteta obeležja unutar statističkog skupa koji je predmet posmatranja. Ove serije mogu imati numerička i atributivna obeležja.

Kod atributivnih obeležja modaliteti se izražavaju opisno i postoji jasno definisana šema njihove klasifikacije.

Kada je u pitanju numeričko obeležje serije strukture nastaju grupisanjem jedinica po vrednostima numeričkog obeležja. Serije strukture po numeričkim obeležjima mogu biti date u vidu:

- proste serije distribucije frekvencija i
- intervalne serije distribucije frekvencija koje mogu biti *zatvorenog* i *otvorenog tipa*.

Primer intervalne serije distribucije frekvencija zatvorenog tipa dat je u tabeli 2. U praksi se koristi intervalna serija distribucije frekvencija otvorenog tipa čiji je primer dat u tabeli 3.

Tabela 1. Uporedni pregled broja stanovnika u Republici Srbiji

Godine	Broj stanovnika u Republici Srbiji
1948	6,527.583
1953	6,978.119
1961	7,641.962
1971	8,446.726
1981	9,313.686
1991	7,822.795
2002	7,498.001
2011	7,186.862

Izvor: Uporedni pregled broja stanovnika 1948, 1953, 1961, 1971, 1981, 1991, 2002 i 2011. godine, dostupno na: http://popis2011.stat.rs/?page_id=2162, [09.02.2016. u 18:00]

Tabela 2. Žensko stanovništvo staro 15 i više godina u Republici Srbiji

Godine	Broj žena
15–19	195.026
20–24	214.510
25–29	235.375
30–39	489.240
40–49	481.138
50–59	572.549

Izvor: Uporedni pregled broja stanovnika 1948, 1953, 1961, 1971, 1981, 1991, 2002 i 2011. godine, dostupno na: http://popis2011.stat.rs/?page_id=2162, [09.02.2016. u 18:00]

Tabela 3. Žensko stanovništvo staro 15 i više godina u Republici Srbiji

Godine	Broj žena
15–19	195.026
20–24	214.510
25–29	235.375
30–39	489.240
40–49	481.138
50–59	572.549
60 i više	1,001.878

Izvor: Uporedni pregled broja stanovnika 1948, 1953, 1961, 1971, 1981, 1991, 2002 i 2011. godine, dostupno na: http://popis2011.stat.rs/?page_id=2162, [09.02.2016. u 18:00]

Prilikom formiranja intervalne serije distribucija frekvencija neophodno je poštovati određena pravila koja su data u nastavku:

- Neophodno je odrediti broj intervala u koje ćemo grupisati podatke uz pomoć formule:

$$K = 1 + 3{,}3\log N$$

gde je *K* broj grupnih intervala, a *N* broj prikupljenih podataka.

- Neophodno je odrediti širinu grupnog intervala - *i* (najčešće se koristi Strugesovo pravilo)

$$i = \frac{i_{max} - i_{min}}{k}$$

gde je X_{max} najveća, a X_{min} najmanja vrednost numeričkog obeležja u skupu statističkih podataka, *i* je širina intervala. Širina grupnog intervala predstavlja razliku između gornje i donje granice intervala. Kod intervalne serije podataka vrednost obeležja nalazi se na sredini grupnog intervala i obeležava se kao x_s.

Istraživanje o potrošnji slatkiša **Primer 1.**

Anketa sa studentima prve godine studijskog programa Finansije i bankarstvo na Visokoj poslovnoj školi strukovnih studija obavljena je od strane autora ovog udžbenika u periodu između 01.11.2015 - 01.12.2015. godine. U anketiranju je učestvovalo 45 studenata (ukupan broj studenata na ovom studijskom programu je 87). Ankete su popunjavali nosioci njihovih domaćinstava, a podaci o njihovoj starosti dati su u nastavku:

36	60	35	38	45	48	31	56	39	36	41	49	49	39	39
45	49	38	45	48	49	49	48	49	52	32	49	49	39	29
47	45	45	43	45	49	44	49	49	39	45	45	34	69	61

Na osnovu prikupljenih podataka o godinama starosti ispitanika formirati intervalnu seriju distribucije frekvencija.

Rešenje:

$$K = 1 + 3{,}3\log 45 = 1 + 3{,}3 * 1{,}653 = 1 + 5{,}455 = 6{,}5 \approx 7$$

Prikupljene podatke o starosti ispitanika treba grupisati u 7 grupnih intervala.

$$i = \frac{x_{max} - x_{min}}{k} = \frac{69 - 29}{7} = \frac{40}{7} = 5{,}71 \approx 6$$

Širina grupnih intervala mora biti 6 godina.

Vrednost donje granice prvog intervala može se odrediti primenom sledeće formule:[22]

$$x_o = x_{min} - \frac{i}{2},$$

gde je x_o donja granica prvog grupnog intervala.

$$x_o = x_{min} - \frac{i}{2} = 29 - \frac{6}{2} = 29 - 3 = 26$$

Na osnovu dobijenih parametara grupišemo podatke u vidu tabele 4.

Tabela 4. Starost učesnika u anketiranju o potrošnji slatkiša

Godine	Broj anketiranih
26 - 32	3
32,1 – 38	6
38,1 – 44	8
44,1 – 50	23
50,1 – 56	2
56,1 – 62	2
62,1 i više	1
Σ	45

Izvor: Istraživanje autora

Statističke serije podataka mogu biti prikazane tabelarno i grafički.

TABELARNO PRIKAZIVANJE STATISTIČKIH PODATAKA

Kao rezultat statističkog posmatranja javljaju se podaci koji moraju biti raspoređeni u odgovarajućoj formi kako bi bili pogodni za dalju obradu. U slučaju kada je broj podataka kojim raspolažemo manji, svi podaci se unose u tabele, a kada raspolažemo velikim brojem podataka, te podatke delimo u statističke serije.

Statističke tabele predstavljaju početak analize podataka preko osnovne i konačne forme prikazivanja statističkih podataka u apsolutnom ili relativnom

[22] Šekarić, M. 2010. *Statističke metode*, Univerzitet Singidunum, Beograd, str. 8.

odnosu. Sastoje se od redova koji su horizontale i kolona koje su vertikale. Svaka tabela ima svoj tekstualni i numerički deo, redni broj, naslov i izvor. Takođe, statistička tabela ima zaglavlje gde su opisno objašnjeni brojevi koji se unose, pretkolonu u kojoj se daje objašnjenje podataka koji se unose u redove, zbirni red koji sadrži podatke o zbirovima pojedinačnih kolona i zbirnu kolonu koja sadrži podatke o zbirovima pojedinačnih redova.

Prema obliku statističke tabelu mogu biti:

- Proste,
- Složene i
- Kombinovane.

Proste statističke tabele prikazuju samo jednu vremensku seriju, dok *složene* statističke tabele prikazuju više prostih tabela. Podaci koji se prikazuju složenim tabelama nalaze se u nekoj međusobnoj sadržinskoj vezi. Podaci su razvrstani prema jednom obeležju na osnovu odgovarajućeg kriterijuma.

Kombinovane tabele sadrže podatke koji se dobijaju ukrštanjem dva i više obeležja koja mogu biti numerička ili atributivna. Ove tabele imaju zbirni red i zbirnu kolonu.

Prema sadržini statističke tabele delimo na:

- *faktografske tabele*
- *analitičke tabele.*

Faktografske tabele pokazuju kakvo je stvarno stanje podataka po određenim obeležjima, dok *analitičke tabele* pored te informacije daju još i brojčane informacije o unutrašnjim odnosima između elemenata populacije i zakonitostima koje postoje kod posmatranog skupa.

Pored već pomenutih postoje i tzv. korelacione tabele i tabele kontingencije. Ukoliko se ukrštaju dva ili više numeričkih obeležja po modalitetima, takav raspored statističkih jedinica daje se u vidu *korelacione tabele.* Tabele koje prikazuju raspored statističkih jedinica prema klasifikaciji atributivnih obeležja predstavljaju *tabele kontingencije.*

Prema **nameni** statističke **tabele** delimo na:

- obradne tabele i
- publikacione tabele.

Obradne tabele se koriste za potrebe obrade i sređivanje statističkih podataka jer predstavljaju izvor detaljnih informacija. One služe za internu upotrebu statističkih organa jer se na osnovu njih vrši kontrola podataka. *Publikacione tabele* su namenjene širokom krugu korisnika i prilagođene su za određeni oblik publikacija.

Svako polje statističke tabele mora biti popunjeno. Ukoliko ne postoji podatak za određeno polje, umesto podatka u konkretno polje upisujemo odgovarajući znak:[23]

- = ukoliko nema pojave;

... = ne raspolažemo podatkom;

0 = u odnosu na datu jedinicu mere podatak je manji od 0,5;

0,0 = u odnosu na datu jedinicu mere podatak je manji od 0,05;

Ø = prosek;

1/ = ovako se označava napomena ispod tabele;

// = ukoliko je podatak nepotpun ili nedovoljno proveren;

* = ukoliko je podatak nedovoljno proveren;

→↑ = označava da je obuhvaćeno podatkom u smeru strelice.

GRAFIČKO PRIKAZIVANJE STATISTIČKIH PODATAKA

Pored tabelarnog prikaza statističke serije podataka mogu biti prikazane i uz pomoć **grafikona** u koordinatnom sistemu ili izvan njega. Uz pomoć grafikona moguće je bolje razumeti prikupljene podatke i imati uvid u osnovne karakteristike pojave koja je predmet posmatranja. Na osnovu toga vrši se bolja analiza podataka, kao i interpretacija dobijenih rezultata.

Cilj statističkog istraživanja i priroda prikupljenih podataka opredeljuju izbor vrste grafikona koji ćemo koristiti za interpretaciju podataka. Posebna vrsta grafikona pogodna je za prikazivanje numeričke varijable, kvalitativne varijable i vremenskih nizova.

U zavisnosti od toga da li se statističkim grafikonima prikazuju podaci prostih, složenih ili kombinovanih tabela razlikujemo: *proste, složene, ili kombinovane statističke grafikone*.

Osnovne **vrste grafikona delimo na**: *dijagrame, kartograme i piktograme*. Ova podela grafikona izvršena je prema elementima koje dati grafikoni sadrže.

Prikazivanje podataka uz pomoć dijagrama može biti u vidu tačaka (stigmagrami), linija (poligoni), površina (histogrami) i prostora (stereogrami).

Grafički prikazi pomoću oznaka na geografskim kartama nazivaju se

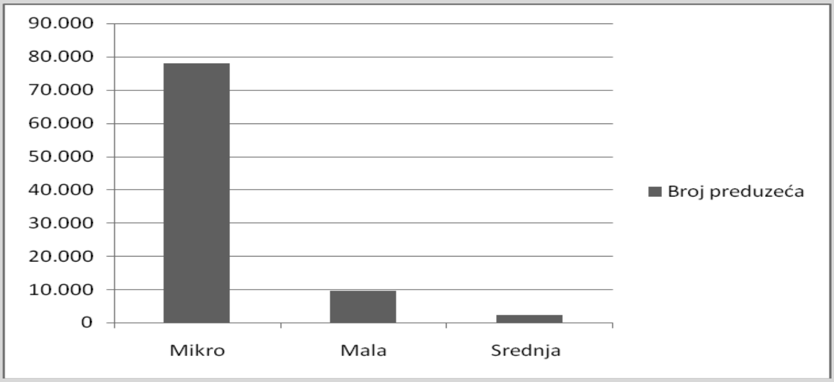
[23] Stojković, M., 1995. Statistika za menadžere, Ekonomski fakultet u Subotici, Subotica, str. 55.

kartogrami. Kartogrami se mogu koristiti samo za prikazivanje geografske serije podataka. Piktogramima se grafički podaci prikazuju slikama ili figurama, to su takozvane simbolične figure.

Podatke koje smo prikupili pomoću statističkih anketa i sličnih upitnika najbolje je prikazati uz pomoć tablice distribucija frekvencija i *stubičastih grafikona, strukturnih krugova i Paretovim dijagramom.* Na ovaj način najpogodnije se prikazuju **kvalitativne varijable**.

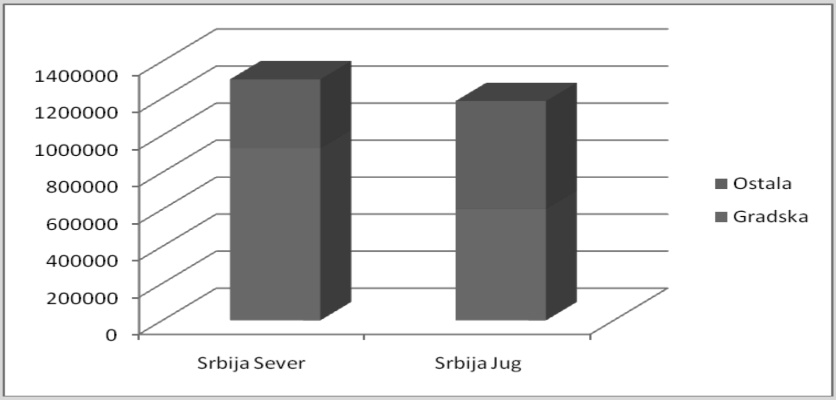
Stubičasti grafikoni najbolje prezentuju učestalost javljanja svake vrednosti obeležja. Visina pravougaonog stubića proporcionalna je veličini frekvencije. Stubičasti grafikoni mogu biti dati u različitom prikazu na primer: stubići mogu da se dodiruju ili ne, mogu biti vertikalni ili horizontalni.

Grafikon 1. Prikaz broja preduzeća u Republici Srbiji prema njihovoj veličini uz pomoć stubičastog grafikona



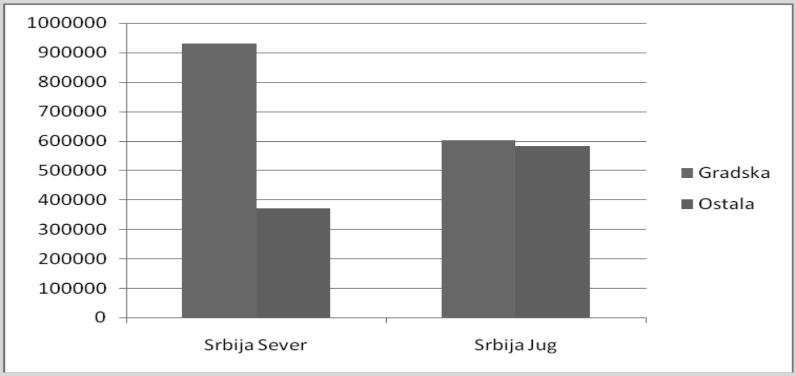
Izvor: *Preduzeća u Republici Srbiji prema veličini, 2010.,* Republički zavod za statistiku, Beograd, Republika Srbija, avgust, 2011. Godine, str. 6., dostupno na: http://pod2.stat.gov.rs/ObjavljenePublikacije/G2011/pdf/G201110077.pdf, [10.02.2016. u 18:00]

Grafikon 2. Prikaz broja domaćinstava u Republici Srbiji prema oblasti uz pomoć komponentnog stubičastog grafikona



Izvor: Uporedni pregled broja domaćinstava prema popisu iz 2011. godine, dostupno na: http://popis2011.stat.rs/?page_id=2162, [09.02.2016. u 18:00]

Grafikon 3. Prikaz broja domaćinstava u Republici Srbiji prema oblasti uz pomoć uporednog stubičastog grafikona



Izvor: Uporedni pregled broja domaćinstava prema popisu iz 2011. godine, dostupno na: http://popis2011.stat.rs/?page_id=2162, [09.02.2016. u 18:00]

Strukturalni krug ili pita prikazuje podatke tako što svaki segment kruga odgovara učešću pojedinačnih frekvencija u ukupnim frekvencijama. Uz pomoć ovog grafičkog prikaza naglašava se udeo svake kategorije. U nastavku je dati primer formiranja strukturalnog kruga. Veličina udela računa se množenjem odgovarajuće frekvencije sa 360^0 i deljenjem tog proizvoda sa ukupnim frekvencijama.

Tabela 5. Prikaz broja preduzeća u Republici Srbiji prema njihovoj veličini

Veličina preduzeća	Broj preduzeća
Mikro	77.989
Mala	9.614
Srednja	2.257
Velika	504
Σ	90.364

Izvor: *Preduzeća u Republici Srbiji prema veličini, 2010.,* Republički zavod za statistiku, Beograd, Republika Srbija, avgust, 2011. Godine, str. 6., dostupno na: http://pod2.stat.gov.rs/ObjavljenePublikacije/G2011/pdf/G201110077.pdf, [10.02.2016. u 18:00]

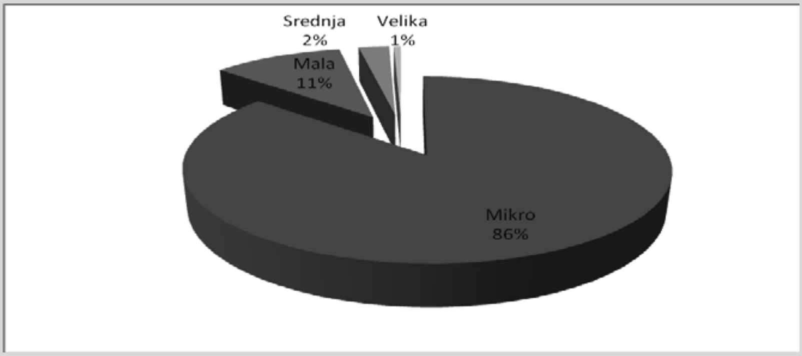
Mikro preduzeća $$\gamma_1 = \frac{360^o * 77.989}{90.364} = 310{,}7^o$$

Mala preduzeća $$\gamma_2 = \frac{360^o * 9.614}{90.364} = 38{,}3^o$$

Srednja preduzeća $$\gamma_3 = \frac{360^o * 2.257}{90.364} = 9^o$$

Velika preduzeća $$\gamma_4 = \frac{360^o * 504}{90.364} = 2^o$$

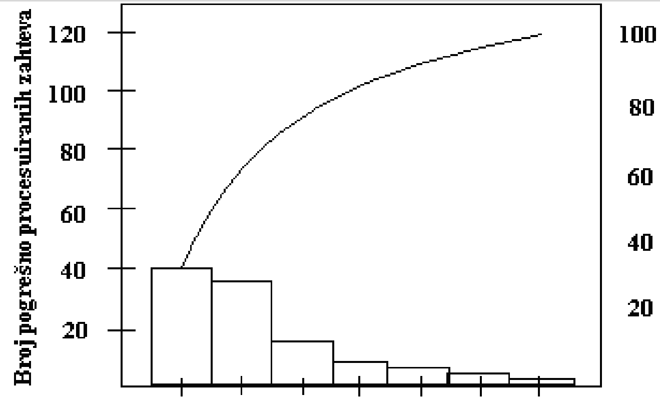
Grafikon 4. Prikaz broja preduzeća u Republici Srbiji prema njihovoj veličini uz pomoć strukturalnog kruga



Izvor: *Preduzeća u Republici Srbiji prema veličini, 2010.,* Republički zavod za statistiku, Beograd, Republika Srbija, avgust, 2011. Godine, str. 6., dostupno na: http://pod2.stat.gov.rs/ObjavljenePublikacije/G2011/pdf/G201110077.pdf, [10.02.2016. u 18:00]

Paretov dijagram predstavlja jedan oblik stubičastog grafikona koji pokazuje frekvencije uzroka grešaka, a njegovi stubići prezentuju frekvencije opadajućom dinamikom, s leva na desno. On omogućava lakše utvrđivanje uzroka problema i njihovo eliminisanje uz najmanje troškove. Ovakav grafički prikaz omogućava da se izdvoje uzroci problema koji imaju najveću frekvenciju. Izraz pravilo „80-20“ se često koristi za Paretov rezultat.

Grafikon 5. Prikaz grešaka u procesuiranju odštetnih zahteva uz pomoć Paretovog dijagrama

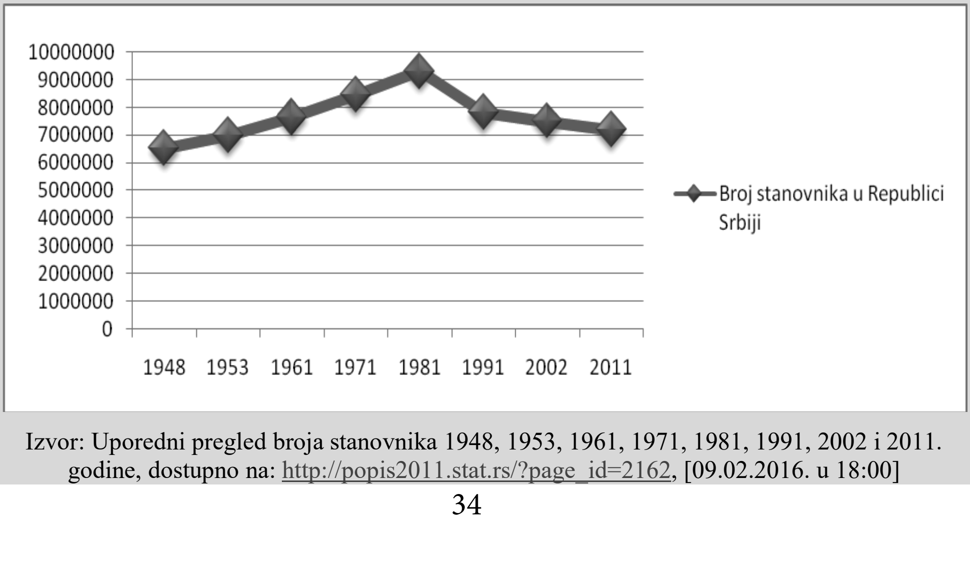


Nedostatak	1	5	4	2	6	3	Ostalo
Broj pogrešno procesuiranih zahteva	40	37	17	9	7	6	4
Procenat	33,3	30,8	14,2	7,5	5,8	5,0	3,3
Kumulativ procenta	33,3	64,2	78,3	85,8	91,7	96,7	100,0

Izvor: Newbold, P., Carlson, W., Thorne, B., 2010. *Statistika za poslovanje i ekonomiju*, Mate, Zagreb, str. 18.

Vremenska serija najčešće se prikazuje uz pomoć *linijskog dijagrama*. Na ordinati linijskog dijagrama prikazuju se numeričke vrednosti, dok se vreme (jedan sat, dan, nedelja, mesec, godina) prikazuje na apscisi. Za svako opažanje dobijamo tačku na grafikonu spajanjem numeričke vrednosti sa vremenom kojem odgovara. Spajanjem susednih tačaka linijom dobija se linijski grafikon. Na osnovu podataka u tabeli 1. u nastavku je dat prikaz linijskog dijagrama.

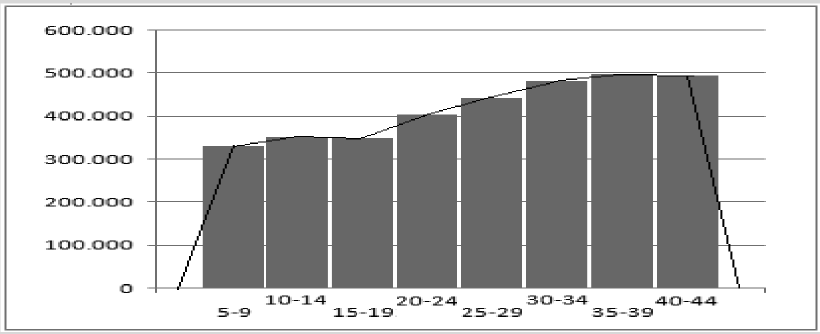
Grafikon 6. Prikaz broja stanovnika u Republici Srbiji uz pomoć linijskog dijagrama



Izvor: Uporedni pregled broja stanovnika 1948, 1953, 1961, 1971, 1981, 1991, 2002 i 2011. godine, dostupno na: http://popis2011.stat.rs/?page_id=2162, [09.02.2016. u 18:00]

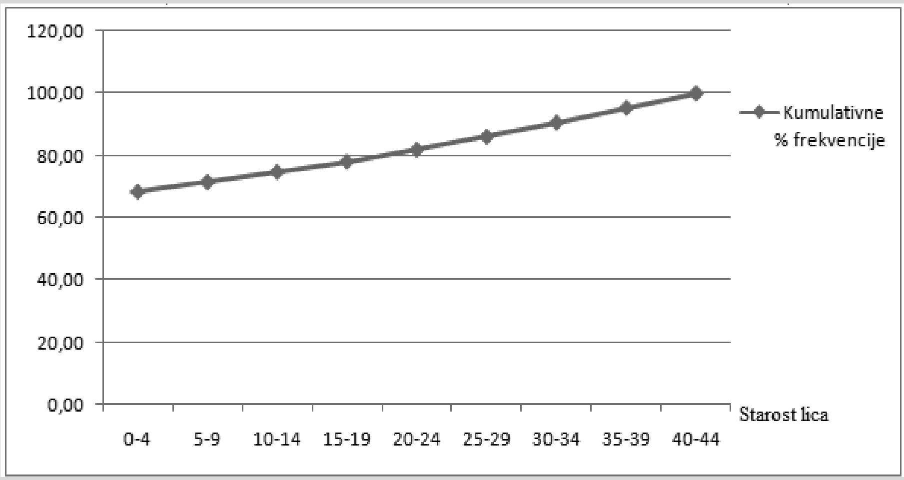
Histogram i *ogiva* pogodni su za grafičko prikazivanje numeričkih podataka. Histogram prikazuje vrednosti obeležja uz pomoć spojenih stubića koji su uspravno postavljeni na apscisu, a učestalost javljanja svake vrednosti obeležja prikazana je na ordinati. Ogiva predstavlja kumulativni linijski dijagram. Kumulativ se računa za relativne frekvencije.

Grafikon 7. Prikaz broja stanovnika u Republici Srbiji prema starosti pomoću histograma



Izvor: Stanovništvo prema starosti i polu u Republici Srbiji 2011. godine, dostupno na: http://popis2011.stat.rs/?page_id=2162, [09.02.2016. u 18:00]

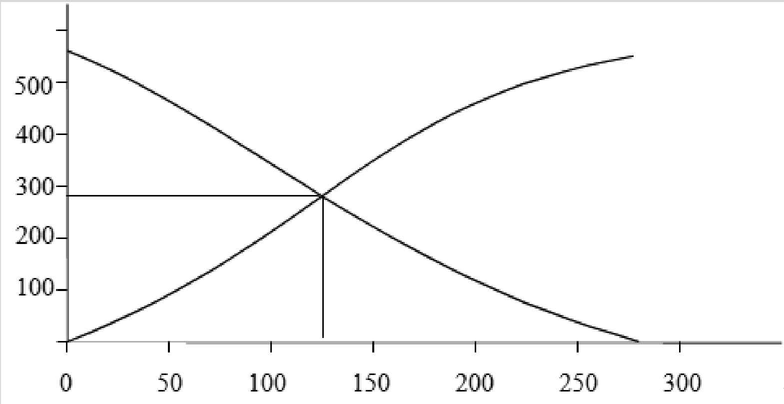
Grafikon 8. Prikaz broja stanovnika u Republici Srbiji prema starosti pomoću ogive



Izvor: Stanovništvo prema starosti i polu u Republici Srbiji 2011. godine, dostupno na: http://popis2011.stat.rs/?page_id=2162, [09.02.2016. u 18:00]

Grafikon 9. Prikaz broja domaćinstava prema mesečnoj potrošnji vode pomoću kumulativa ispod i kumulativa iznad

Broj domaćinstava



Mesečna potrošnja vode

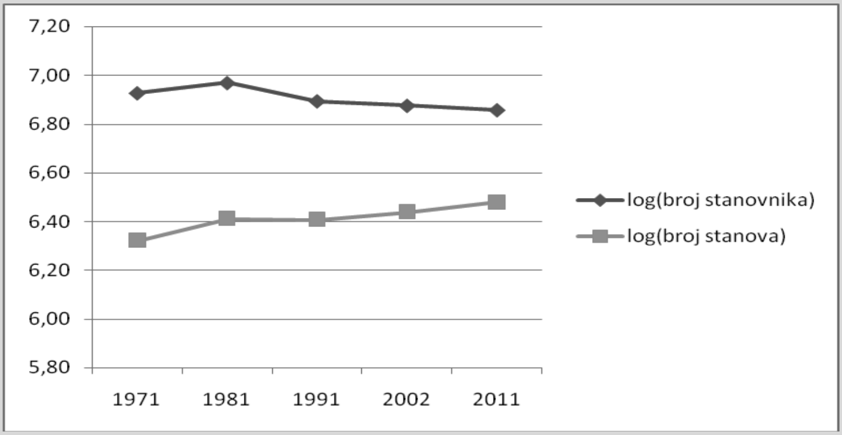
Ukoliko raspolažemo podacima koji imaju različite jedinice mere, a postoje velike razliku u podacima serije koja je predmet posmatranja, za grafičko prikazivanje takve serije podataka možemo koristiti *polulogaritamski dijagram.* Primer polulogaritamskog dijagrama dat je u nastavku. Grafikon je urađen na osnovu podataka u tabeli 6.

Tabela 6. Uporedni prikaz broja stanovnika i broja stanova u Republici Srbiji

Godine	Broj stanovnika	log(broj stanovnika)	Broj stanova	log(broj stanova)
1971	8446726	6,93	2095612	6,32
1981	9313686	6,97	2579845	6,41
1991	7822795	6,89	2556092	6,41
2002	7498001	6,87	2743996	6,44
2011	7186862	6,86	3012923	6,48

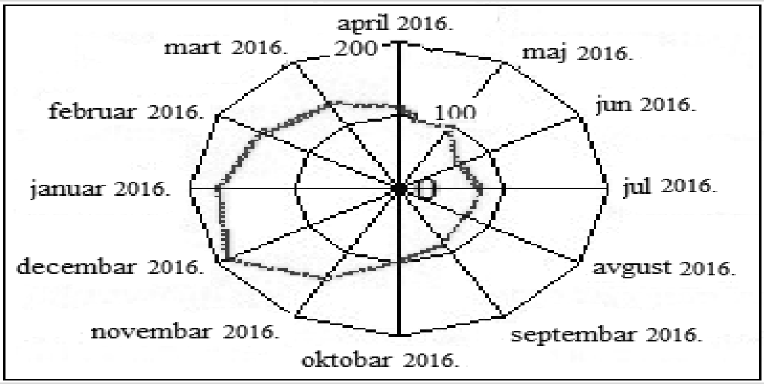
Izvor: Uporedni pregled broja stanovnika 1948, 1953, 1961, 1971, 1981, 1991, 2002 i 2011. godine i uporedni pregled broja domaćinstava 1948-2011 i stanova 1971-2011., dostupno na: http://popis2011.stat.rs/?page_id=2162, [09.02.2016. u 18:00]

Grafikon 10. Prikaz broja stanovnika i broja stanova u Republici Srbiji pomoću polulogaritamskog dijagrama



Izvor: Uporedni pregled broja stanovnika 1948, 1953, 1961, 1971, 1981, 1991, 2002 i 2011. godine i uporedni pregled broja domaćinstava 1948-2011 i stanova 1971-2011., dostupno na: http://popis2011.stat.rs/?page_id=2162, [09.02.2016. u 18:00]

Grafikon 11. Grafički prikaz podataka pomoću polarnog dijagrama



Polarni dijagram predstavlja vrstu grafikona koji je najpogodniji za prikazivanje podataka čije kretanje ima sezonski karakter kao što je na primer: prodaja čizama, sladoleda, zimskih jakni i drugo.

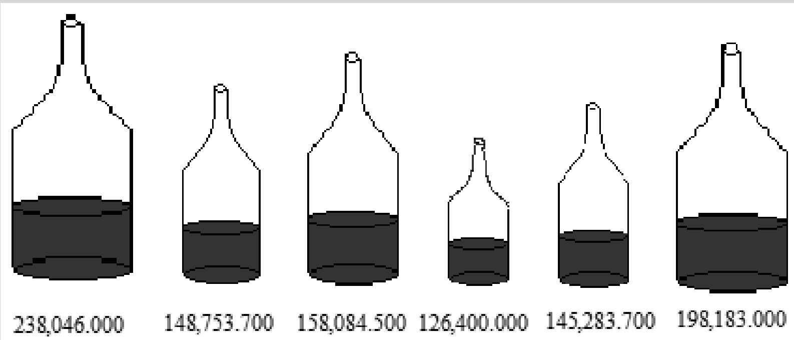
Zahvaljujući primeni računara i raznim programima za obradu podataka i izradu grafikona olakšava se proces obrade rezultata statističke analize i kreativnije se prezentuju dobijeni rezultati. Prilikom izbora grafičkih prikaza treba biti veoma oprezan jer loša upotreba grafikona može stvoriti lažnu sliku o pojavi koja je predmet statističkog posmatranja. Preporuka je da treba izbegavati grafičke prikaze koji se zasnivaju na različitim površinama, piramidama, različitim oblicima i figurama jer oni u najvećem broju slučajeva ne prezentuju podatke na pravi način. U nastavku su dati primeri loše upotrebe grafičkih prikaza.

Tabela 7. Uporedni prikaz ukupne proizvodnje vina u Republici Srbiji po godinama

Godina	Proizvodnja vina
2009	238,046.000
2010	148,753.700
2011	158,084.500
2012	126,400.000
2013	145,283.700
2014	198,183.000

Izvor: Popis poljoprivrede 2012. godine „Vinski atlas", 2015. Beograd, dostupno na: http://webrzs.stat.gov.rs/WebSite/userFiles/file/Poljoprivreda/Knjige/VinskiAtlas.pdf, [09.02.2016. u 18:00]

Grafikon 12. Grafički prikaz proizvodnje vina u Srbiji u periodu između 2009-2014. godine



Izvor: Izrada autora - Podaci preuzeti iz tabele 7.

Grafički prikaz iznad ilustruje proizvodnju vina u Republici Srbiji. Međutim, proporcionalni odnos između pojedinačnih proizvedenih količina vina ne odgovara proporcionalnom odnosu ikona koje predstavljaju pojedinačne količine proizvodnje. Zbog toga posmatrač neće steći pravi utisak o stvarnom kretanju podataka samo na osnovu grafikona, već mora da se koncentriše i na numeričke podatke i sam utvrdi odnos u proizvodnji.

Za izradu dobrih grafičkih prikaza neophodno je poštovati određena pravila:[24]

[24] Berenson, M., Levine, M., Krehbiel, T., 2011. *Basic Business Statistics: Concepts and Applications,* 12th edition, Prentice Hall, New Jersey, pp. 44.

-grafik treba da sadrži adekvatan naziv,

-grafik ne sme pogrešno da prezentuje podatke,

-grafik ne treba da sadrži nepotrebne dodatke koji ne pružaju nikakve korisne informacije i odvraćaju pažnju korisnika jer tako korisnik ne može da sagleda suštinu,

-ukoliko je u pitanju dvodimenzionalni grafički prikaz, neophodno je da postoji skala za svaku osu,

-sve ose moraju biti propisno obeležene, a vertikalna skala bi trebalo da krene od nule,

-grafik treba da bude izrađen u skladu sa jasnim ciljem i da inicira poređenje podataka,

-preporuka je odabrati najjednostavniji mogući grafikon za date statističke podatke.

PITANJA ZA DISKUSIJU

- ✓ Da li znate značenje reči od koje potiče reč „statistika”?
- ✓ Definišite statistiku.
- ✓ Predmet izučavanja statistike.
- ✓ Šta znate o počecima primene statistike?
- ✓ Objasnite kada je došlo do razvoja statistike kao naučne discipline.
- ✓ Šta obezbeđuje savremena statistika?
- ✓ Objasnite faze u razvoju statistike.
- ✓ U kojim oblastima poslovanja statistika nalazi primenu?
- ✓ Objasnite cilj, predmet i stvrhu statističkog istraživanja.
- ✓ Objasnite faze statističkog istraživanja.
- ✓ Objasnite metode statističkog posmatranja.
- ✓ Koji izvori podataka mogu biti korišćeni prilikom sprovođenja statističkog istraživanja?
- ✓ Definišite pojam statističkog skupa.
- ✓ Objasnite karakteristike osnovnog skupa.
- ✓ Po čemu se razlikuju elementi osnovnog skupa?
- ✓ Na osnovu čega razlikujete numerička i atributivna obeležja?
- ✓ Objasnite pojam uzorka i kriterijume koje uzorak mora da zadovoljava.
- ✓ Koje metode uzorkovanja znate?
- ✓ Objasnite vrste namernih uzoraka.
- ✓ Koje vrste uzorka postoje u statističkoj teoriji?
- ✓ Objasnite nominalnu, intervalnu, ordinalnu i skalu odnosa.
- ✓ Šta je statistička serija podataka?
- ✓ Kako delimo statističke serije u zavisnosti od broja obeležja?
- ✓ Kako delimo statističke serije prema tome šta pokazuju i u zavisnosti od toga kako su uređene vrste obeležja?
- ✓ Kakve mogu biti vremenske serije prema prirodi podataka?
- ✓ Objasnite prostu seriju distribucije frekvencija i dajte jedan primer.
- ✓ Objasnite intervalnu seriju distribucije frekvencija i dajte primer.
- ✓ Na koji način mogu biti prikazane statističke serije?
- ✓ Šta je statistička tabela?
- ✓ Koje vrste statističkih tabela znate?
- ✓ Šta je grafikon?
- ✓ Koje su osnovne vrste grafikona?
- ✓ Dajte jedan primer za svaku vrstu grafičkog prikaza.
- ✓ Koja pravila moramo poštovati u cilju izrade reprezentativnih grafičkih prikaza?
- ✓ Koje grafičke prikaze podataka treba izbegavati?

2.

MERE CENTRALNE TENDENCIJE, MERE DISPERZIJE I MERE OBLIKA RASPOREDA

MERE CENTRALNE TENDENCIJE

Izračunate srednje vrednosti

Aritmetička sredina

Harmonijska sredina

Geometrijska sredina

Pozicione srednje vrednosti

Modus

Medijana

MERE DISPERZIJE

Apsolutne mere disperzije

Relativne mere disperzije

MERE OBLIKA RASPOREDA

PRIMENA MERA CENTRALNE TENDENCIJE, DISPERZIJE I OBLIKA RASPOREDA

U statističkoj teoriji i praksi za opisivanje merenih pojava koriste se:

- mere centralne tendencije,
- mere varijabilnosti i
- mere oblika rasporeda.

Mere centralne tendencije ukazuju na tendencije grupisanja rezultata merenja oko neke centralne vrednosti. Mere varijacije pokazuju koliko odstupaju vrednosti obeležja od centralne vrednosti. Mere oblika rasporeda pokazuju raspored vrednosti obeležja od najniže do najveće vrednost.

MERE CENTRALNE TENDENCIJE

Mere centralne tendencije ili srednjih vrednosti koriste se u svim oblastima statističke analize. U zavisnosti od načina obračuna srednje vrednosti delimo na :

- izračunate srednje vrednosti kao što su:
  - -aritmetička sredina ($\overline{X}$),
  - -geometrijska sredina (G) i
  - -harmonijska sredina (H).
- pozicione srednje vrednosti kao što su:
  - -medijana (Me) i
  - -modus (Mo).

Srednje vrednosti imaju nekoliko *karakteristika*. Jedna od karakteristika srednjih vrednosti je neophodnost zavisnosti srednje vrednosti od svih vrednosti obeležja x u ukupnom statističkom skupu. Takođe, srednja vrednost mora biti manja od najveće, a veća od najmanje vrednosti obeležja. Kao posebna karakteristika srednjih vrednosti je da je srednja vrednost jednaka vrednosti posmatranog obeležja u slučaju kada su međusobno jednake sve vrednosti obeležja koje se posmatra u okviru jednog skupa.

ARITMETIČKA SREDINA

Aritmetička sredina predstavlja meru srednjih vrednosti sa kojom se najčešće susrećemo u statističkim izveštajima. U odnosu na pozicione srednje vrednosti aritmetička sredina predstavlja pouzdaniju meru srednjih vrednosti. Da bi se izračunala aritmetička sredina moraju biti ispunjena dva uslova:[25]

- Rezultati izvršenih merenja moraju biti dati u vidu intervalne ili racio skale;

- Neophodno je da postoji pretpostavka o normalnom rasporedu rezultata izvršenih merenja u skupu (uzorku).

Neke od najvažnijih *karakteristika aritmetičke sredine* date su u nastavku:[26]

- Zbir odstupanja pojedinačnih vrednosti obeležja od vrednosti aritmetičke sredine iznosi nula. Aritmetička sredina predstavlja meru srednjih vrednosti ukoliko je zbir svih odstupanja pojedinačnih vrednosti obeležja sa pozitivnim znakom jednak zbiru svih odstupanja pojedinačnih vrednosti obeležja sa negativnim znakom. Ova karakteristika aritmetičke sredine može se dokazati primenom formule:

$\sum(x_i - \bar{x}) = 0$ za negrupisane podatke i

$\sum f(x_i - \bar{x}) = 0$ za grupisane podatke

- Zbir kvadratnog odstupanja pojedinačnih vrednosti obeležja od vrednosti aritmetičke sredine je uvek minimalna vrednost, odnosno, manja vrednost od zbira kvadrata odstupanja vrednosti obeležja od bilo koje druge vrednosti obeležja umesto od aritmetičke sredine.

- S obzirom na to da se aritmetička sredina zasniva na svim vrednostima posmatranog obeležja, promenom bilo koje vrednosti obeležja utiče

[25] Turjačanin, V., Čekrlija, Đ., 2006. *Osnovne statističke metode i tehnike u SPSS-u*, Centar za kulturni i socijalni popravak, Banja Luka, str. 70.

[26] Bary, G. C. 2010. *Business statistics, 3rd Edition,* Tata McGraw-Hill Education, New Delhi, pp. 91.

se na promenu vrednosti aritmetičke sredine.

- U slučaju kada se u posmatranom uzorku nalaze ekstremne vrednosti koje značajno odstupaju od ostalih vrednosti obeležja one značajno utiču na vrednost aritmetičke sredine. U tom slučaju aritmetička sredina može prestati da bude reprezentativna mera centralne tendencije.

Na osnovu analize aritmetičke sredine mogu se izdvojiti njene prednosti, ali i nedostaci.[27]

Prednosti primene aritmetičke sredine su sledeće:

- Postupak obračuna aritmetičke sredine je jednostavan i jedinstven zbog toga što bilo koji skup podataka može imati samo jednu vrednost aritmetičke sredine.

- Aritmetička sredina se računa na osnovu svih vrednosti obeležja što je prednost jer nijedna vrednost obeležja nije izostavljena.

- Veličina uzorka nema uticaja na vrednost aritmetičke sredine. Ovo podrazumeva da u slučaju kada imamo više uzoraka izvučenih iz jedne populacije podataka varijacije u veličini aritmetičkih sredina različitih uzoraka biće manje.

- Još jedna prednost aritmetičke sredine ogleda se u tome što se može izraziti primenom algebarskog postupka.

- Aritmetička sredina se koristi i kod međusobnog upoređivanja nekoliko serija podataka.

Nedostaci primene aritmetičke sredine su sledeći:

- Kao najveći nedostatak aritmetičke sredine ističe se to što ona ne može da se izračuna u nekim slučajevima. U slučaju kada je distribucija frekvencija data sa otvorenim intervalima na početku ili na kraju, ili nejednakim klasama, aritmetička sredina neće biti precizno izračunata.

- Ukoliko skup statističkih podataka sadrži ekstremne vrednosti aritmetička sredina prestaje da bude adekvatna mera centralne tendencije tog skupa podataka.

- U slučaju kada je potrebno izračunati aritmetičku sredinu veoma velikog skupa podataka njen obračun se usložnjava jer je neophodno obuhvatiti svaku vrednost obeležja pojedinačno. Ovaj problem može biti rešen primenom metoda grupisanja podataka u manje uzorke na osnovu kojih će se aproksimativno odrediti aritmetička sredina populacije.

Aritmetička sredina skupa izračunava se kao količnik zbira svih

[27] Bary, G. C. 2010. *Business statistics, 3rd Edition,* Tata McGraw-Hill Education, New Delhi, pp. 91.

vrednosti obeležja i ukupnog broja vrednosti posmatranog obeležja.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots x_n}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \quad \text{ili} \quad \bar{x} = \frac{\sum x_i}{N},$$

gde je $\bar{x}$ - aritmetička sredina, x – posmatrano obeležje, a N – veličina populacije.

Aritmetička sredina se računa na osnovu negrupisanih podataka i na osnovu grupisanih podataka u vidu rasporeda frekvencija. Takođe, ona se izračunava za uzorak i za osnovni skup statističkih podataka.

Za uzorak veličine *n*, aritmetička sredina za negrupisane podatke ima formulu:

$$m = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{ili} \quad m = \frac{\sum x_i}{n}$$

gde je m – aritmetička sredina uzorka, x – posmatrano obeležje, a n - veličina uzorka.

Izračunavanje aritmetičke sredine na osnovu negrupisanih podataka **Primer 2.**

Dat je pregled broja stanovnika u Republici Srbiji po godinama:[28]

1948. godine 6,527.583 stanovnika, 1953. godine 6,978.119 stanovnika,

1961. godine 7,641.962 stanovnika, 1971. godine 8,446.726 stanovnika,

1981. godine 9,313.686 stanovnika, 1991. godine 7,822.795 stanovnika,

2002. godine 7,498.001 stanovnika i 2011. godine 7,186.862 stanovnika.

Izračunajte prosečan broj stanovnika.

Rešenje:

$$m = \frac{6{,}527.583 + 6{,}978.119 + 7{,}641.962 + 8{,}446.726 + 9{,}313.686 + 7{,}822.795 + 7{,}498.001 + 7{,}186.862}{8}$$

$$m = \frac{61{,}415.734}{8} = 7{,}676.967$$

Odgovor: Prosečan broj stanovnika u Republici Srbiji za posmatrani

[28] Uporedni pregled broja stanovnika 1948, 1953, 1961, 1971, 1981, 1991, 2002 i 2011. godine, dostupno na: http://popis2011.stat.rs/?page_id=2162, [09.02.2016. u 18:00]

period iznosi 7,676.967 stanovnika.

U statistici se najčešće koriste grupisani podaci u vidu rasporeda frekvencija. Ukoliko su vrednosti obeležja $x_1, x_2, x_3,..., x_n$, a njihove frekvencije $f_1, f_2, f_3, .., f_n$, onda se aritmetička sredina skupa izračunava na osnovu formule:

$$\bar{x} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 + ... f_n x_k}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} f_i x_i$$ Ponderisana aritmetička sredina skupa

gde je

$$N = f1 + f2 + f3 + ... + fk = \sum_{i=1}^{k} fi$$

Ponderisana aritmetička sredina uzorka izračunava se na osnovu formule:

$$m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} f_i x_i$$

Izračunavanje ponderisane aritmetičke sredine na osnovu grupisanih podataka (prosta distribucija frekvencija) **Primer 3.**

Na osnovu podataka u tabeli 8. izračunajte prosečan broj članova po domaćinstvu.

Tabela 8. Prosečan broj članova po domaćinstvu u Republici Srbiji

Prosečan broj članova po domaćinstvu (x_i)	**Broj domaćinstava (f_i)**	**$x_i * f_i$**
1	16	16
2	52	104
3	36	108
4	10	40
5	6	30
6	1	6
Σ	121	304

Izvor: Domaćinstva prema broju članova po naseljima, popis 2011., dostupno na: http://popis2011.stat.rs/?page_id=2162, [09.02.2016. u 18:00]

Rešenje:

$$m = \frac{304}{121} = 2,51$$

Odgovor: Prosečan broj članova domaćinstva iznosi 2,51 član u svih 304 domaćinstava na teritoriji Republike Srbije.

Kod intervalne distribucije frekvencija aritmetička sredina osnovnog skupa izračunava se primenom sledeće formule:

$$\bar{x} = \frac{f_1 x_{s1} + f_2 x_{s2} + f_3 x_{s3} + \dots f_n x_{sk}}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} f_i x_{si}$$

gde je x_s sredina grupnog intervala.

Kod intervalne distribucije frekvencija aritmetička sredina uzorka izračunava se primenom sledeće formule:

$$\bar{x} = \frac{f_1 x_{s1} + f_2 x_{s2} + f_3 x_{s3} + \dots f_n x_{sk}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} f_i x_{si}$$

Izračunavanje ponderisane aritmetičke sredine na osnovu grupisanih podataka (intervalna serija podataka) Primer 4.

Na osnovu podataka u tabeli 4. koja je obrađena u prvom delu i data u nastavku izračunajte prosečnu starost anketiranih lica.

Tabela 9. Starost učesnika u anketiranju o potrošnji slatkiša

Godine	Broj anketiranih
26 - 32	3
32,1 – 38	6
38,1 – 44	8
44,1 – 50	23
50,1 – 56	2
56,1 – 62	2
62,1 i više	1
Σ	45

Izvor: Istraživanje autora

Rešenje:

Radna tabela za primer 9.

Godine	Broj anketiranih	Xs	fi*xs
26 - 32	3	29	87
32,1 – 38	6	35	210
38,1 – 44	8	41	328

44,1 – 50	23	47	1081
50,1 – 56	2	53	106
56,1 – 62	2	59	118
62,1 i više	1	65	65
Σ	45	-	1995

$$m = \frac{1995}{45} = 44{,}33$$

Odgovor: Prosečna starost anketiranih lica iznosi 44,33 godine.

GEOMETRIJSKA SREDINA

Geometrijska sredina predstavlja meru srednje vrednosti koja je najpogodnija za analizu vremenskih serija. Geometrijska sredina definiše se kao n – ti koren proizvoda n podataka serije koja je predmet posmatranja.[29] Ona predstavlja srednju vrednost koja predstavlja proporcionalne promene među podacima. Geometrijska sredina i geometrijska stopa rasta koriste se za merenje stanja investicija tokom vremena ili za utvrđivanje prosečne procentualne promene promenljive tokom perioda n.[30] Dakle, uz pomoć geometrijske sredine može se utvrditi prosečan prinos na investirana sredstva tokom vremena.

Ako sa $x_1, x_2, \ldots, x_n$ označimo vrednosti obeležja x, onda geometrijsku sredinu izražavamo sledećim obrascem:

$$G = \sqrt[N]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_N}$$

Izračunavanje geometrijske sredine ima smisla samo kada su sve vrednosti obeležja veće od nula. S obzirom na ovaj uslov prethodni obrazac možemo logaritmovati:

$$\log G = \frac{1}{N}\left(\log x_1 + \log x_2 + \ldots + \log x_N\right) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\log x_i$$

Antilogaritmovanjem dobijamo obrazac za izračunavanje geometrijske sredine negrupisanih podataka:

---

[29] Bary, G. C. 2010. *Business statistics, 3rd Edition,* Tata McGraw-Hill Education, New Delhi, pp. 105.

[30] Berenson, M., Levine, M., Krehbiel, T., 2011. *Basic Business Statistics: Concepts and Applications,* 12th edition, Prentice Hall, New Jersey, pp. 66.

$$G = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\log x_i}$$

Izračunavanje geometrijske sredine na osnovu negrupisanih podataka **Primer 5.**

Dat je pregled broja stanovnika u Republici Srbiji po godinama:[31]

1948. godine 6,527.583 stanovnika, 1953. godine 6,978.119 stanovnika,

1961. godine 7,641.962 stanovnika, 1971. godine 8,446.726 stanovnika,

1981. godine 9,313.686 stanovnika, 1991. godine 7,822.795 stanovnika,

2002. godine 7,498.001 stanovnika i 2011. godine 7,186.862 stanovnika.

Izračunajte geometrijsku sredinu i geometrijsku stopu rasta.

Rešenje:

Radna tabela za primer 5.

Godine	Broj stanovnika u Republici Srbiji	log x
1948	6527583	6,814752
1953	6978119	6,843738
1961	7641962	6,883205
1971	8446726	6,926688
1981	9313686	6,969122
1991	7822795	6,893362
2002	7498001	6,874945
2011	7186862	6,856539
	Σ	55,06235

$$G = \sqrt{\frac{55,06235}{8}} = \sqrt{6,882794} = 7,634.735,57$$

[31] Uporedni pregled broja stanovnika 1948, 1953, 1961, 1971, 1981, 1991, 2002 i 2011. godine, dostupno na: http://popis2011.stat.rs/?page_id=2162, [09.02.2016. u 18:00]

Odgovor: Prosečan broj stanovnika u Republici Srbiji za posmatrani period iznosi 7,634.735,57 stanovnika.

Za prostu distributivnu frekvenciju obrazac za geometrijsku sredinu glasi:

$$G = \sqrt[N]{x_1^{f_1} * x_2^{f_2} * x_3^{f_3} * \dots x_k^{f_k}}$$

Logaritmovanjem prethodnog obrasca dobija se:

$$\log G = \frac{1}{N}\left(f_1 \log x_1 + f_2 \log x_2 + f_3 \log x_3 + \dots + f_k \log x_k\right)$$

Antilogaritmovanjem dobijamo obrazac za izračunavanje geometrijske sredine grupisanih podataka:

$$G = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} fi * \log x_i}$$

Jedna od *prednosti* geometrijske sredine je u tome što je pogodna za utvrđivanje prosečnih promena kod onih serija u kojima ne raspolažemo svim vrednostima obeležja. Određivanje vrednosti obeležja koje nam nisu poznate na osnovu ostalih poznatih vrednosti obeležja moguće je pomoću prosečne stope rasta.

Ukoliko su nam poznati lančani indeksi neke vremenske serije koji pokazuju uzastopne promene obeležja x možemo odrediti geometrijsku sredinu ovog niza. Stopa rasta u intervalu koji se posmatra utiče na vrednost geometrijske sredine. Za obračun geometrijske stope rasta dovoljno je imati podatke o vrednosti obeležja na početku i na kraju vremenske serije. Geometrijska stopa rasta se odbija iz odnosa:

$$r_g = \left(\sqrt[N-1]{\frac{y_N}{y_1}} - 1\right) * 100\%$$

gde je y_1 – prva vrednost u vremenskoj seriji, N – broj podataka, a y_N – poslednja vrednost u seriji.

Na osnovu podataka datih u primeru 5 izračunaćemo geometrijsku stopu rasta na sledeći način:

$$rg = \left(\sqrt[8-1]{\frac{7{,}186.862}{6{,}527.583}} - 1 \right) * 100 = \left(\sqrt[7]{1{,}100999} - 1 \right) * 100$$

$$rg = (1{,}01384 - 1) * 100 = 0{,}01384 * 100 = 1{,}384\%$$

Odgovor: Prosečna stopa rasta broja stanovnika u Republici Srbiji za posmatrani period iznosi 1,384%.

HARMONIJSKA SREDINA

Harmonijska sredina (H) je recipročna vrednost aritmetičke sredine recipročnih vrednosti obeležja. Ona se obračunava samo ukoliko su vrednosti obeležja koje je predmet posmatranja različite od nule. Njena primena u statistici je ograničena. Obično se harmonijska sredina koristi u situaciji kada su vrednosti obeležja izražene u vidu recipročnih odnosa i stoje u obrnutoj srazmeri sa obimom pojave. Odnos reciprociteta se manifestuje tako što se vrednost tih obeležja smanjuje kada se pojava povećava i obrnuto. Harmonijska sredina nije najpogodnija mera srednjih vrednosti kod ekonomskih serija podataka.

Za prostu seriju podataka harmonijska sredina obračunava se na sledeći način:

$$H = \frac{N}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_N}} = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{x_i}}$$

Harmonijska sredina može da se primeni u sledećim situacijama:[32]

- U slučaju kada se traži prosečno radno vreme obrta kapitala u nekom preduzeću;
- Ukoliko serija sadrži recipročne podatke;
- Ukoliko je neophodno izračunati prosečnu količinu proizvoda za isto radno vreme.

Izračunavanje harmonijske sredine na osnovu negrupisanih podataka **Primer 6.**

Prema podacima preduzeća „Soko Štark” trajanje naplate potraživanja

[32] Šekarić, M. 2010. *Statističke metode*, Univerzitet Singidunum, Beograd, str. 27.

od kupaca u danima bilo je sledeće: [33]

2008. godine 121,68 dana, 2009. godine 144,86 dana,

2010. godine 143,19 dana, 2011. godine 156,07 dana.

Izračunaj prosečno vreme naplate potraživanja od kupaca.

Rešenje:

$$H = \frac{4}{\frac{1}{121,68} + \frac{1}{144,86} + \frac{1}{143,19} + \frac{1}{156,07}}$$

$$H = \frac{4}{0,0082 + 0,0069 + 0,00698 + 0,0064} = \frac{4}{0,02848} = 140,45\ dana$$

Odgovor: Prosečno vreme naplate potraživanja od kupaca preduzeća „Soko Štark" za posmatrani period iznosi 140,45 dana.

Ukoliko podaci neke vremenske serije pokazuju recipročne odnose, a njihove frekvencije su različite može se koristiti ponderisana harmonijska sredina. Za prostu distributivnu seriju podataka harmonijska sredina izračunava se pomoću sledećeg obrasca:

$$H = \frac{f_1 + f_2 + \dots + f_k}{\frac{f_1}{x_1} + \frac{f_2}{x_2} + \dots + \frac{f_k}{x_k}} = \frac{N}{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i}$$

Relativni položaj različitih srednjih vrednosti je:

$$H \leq G \leq \overline{X}$$

čime se obezbeđuje da svako individualno zapažanje ima pozitivnu vrednost i da se ove srednje vrednosti međusobno razlikuju.

MEDIJANA

Medijana predstavlja pozicionu srednju vrednost koja pokazuje vrednost obeležja koja se nalazi na sredini serije podataka uređene po veličini vrednosti

[33] Oficijalne šeme finansijskih izveštaja preduzeća "Soko Štark" za 2008., 2009., 2010. i 2011. godinu, dostupno na: www.apr.gov.rs, [02.01.2016. u 18:00]

obeležja od najmanjeg do najvećeg ili od najvećeg do najmanjeg.

Medijana deli seriju podataka na dva jednaka dela. Kada je serija podataka podeljena na četiri dela, vrednosti obeležja koja ih dele zovu se kvartilima, a kada je podeljena na 10 delova, vrednosti obeležja koja ih dele zovu se decilima, dok se vrednosti obeležja koja dele seriju podataka na 100 delova nazivaju centilima.

Postupak određivanja medijane podrazumeva da se podaci poređaju po veličini od najmanjeg do najvećeg, a potom se primenjuju određena pravila:

- za prostu seriju podataka x_1 , x_2 , x_3 , . . . ,xk kada serija ima neparan broj podataka:

$$Me = \frac{X_{(N+1)}}{2}$$

- za prostu seriju podataka ako serija ima paran broj podataka vrednost medijane predstavlja srednju vrednost dve vrednosti obeležja koje se nalaze na sredini serije:

$$Me = \frac{X_{N/2} + X_{N/2+1}}{2}$$

Izračunavanje medijane na osnovu negrupisanih podataka **Primer 7.**

Prema podacima preduzeća „Soko Štark” trajanje naplate potraživanja od kupaca u danima bilo je sledeće: [34]

2008. godine 121,68 dana, 2009. godine 144,86 dana,

2010. godine 143,19 dana, 2011. godine 156,07 dana.

Izračunajte medijanu.

Rešenje:

121,68 143,19 144,86 156,07

$$Položaj\ Me = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

$$Me = \frac{143{,}19 + 144{,}86}{2} = \frac{288{,}05}{2} = 144{,}025$$

Odgovor: Medijana vremena naplate potraživanja od kupaca preduzeća

[34] Oficijalne šeme finansijskih izveštaja preduzeća “Soko Štark” za 2008., 2009., 2010. i 2011. godinu, dostupno na: www.apr.gov.rs, [02.01.2016. u 18:00]

„Soko Štark” za posmatrani period iznosi 144,025 dana.

℘ kod proste distributivne frekvencije medijana se određuje preko kumulativa „ispod“ (ili kumulativa „iznad”) i predstavlja onaj broj koji se nalazi naspram broja u koloni kumulativ „ispod” u kojem je sadržan broj *N/2*. *N* je zbir svih apsolutnih frekvencija, odnosno, odgovara veličini populacije koja se posmatra.

Izračunavanje medijane na osnovu grupisanih podataka (prosta distribucija frekvencija) **Primer 8.**

Na osnovu podataka u tabeli 8. izračunajte medijanu.

Tabela 10. Prosečan broj članova po domaćinstvu u Republici Srbiji

Prosečan broj članova po domaćinstvu (x_i)	Broj domaćinstava (f_i)	Kumulativ „ispod“
1	16	16
2	52	68
3	36	104
4	10	114
5	6	120
6	1	121
Σ	121	-

Izvor: Domaćinstva prema broju članova po naseljima, popis 2011., dostupno na: http://popis2011.stat.rs/?page_id=2162, [09.02.2016. u 18:00]

Rešenje:

$$Položaj\ Me = \frac{121+1}{2} = \frac{122}{2} = 61$$

Odgovor: Polovina domaćinstava na teritoriji Republike Srbije ima prrosečan broj članova domaćinstva manji od 2 član, a druga polovina veći.

Medijana se u okviru intervalne distribucije frekvencije može obračunati na dva načina:

℘ Preko kumulativa „ispod”:

$$Me = l_d + \frac{N/2 - \sum f_i < m}{f_m} * i$$

℘ Preko kumulativa „iznad”:

$$Me = l_g - \frac{N/2 - \sum f_i > m}{f_m} * i$$

gde je:

l_d – donja granica intervala, l_g – gornja granica intervala,

$\Sigma f_i < m$ – zbir frekvencija do medijalnog intervala (*k* ispod)

$\Sigma f_i > m$ – zbir frekvencija do medijalnog intervala (*k* iznad)

f_m – frekvencija medijalnog intervala, i – širina medijalnog intervala.

Izračunavanje medijane na osnovu grupisanih podataka (intervalna serija podataka) **Primer 9.**

Na osnovu podataka u tabeli 4. koja je obrađena u prvom delu i data u nastavku izračunajte medijanu.

Tabela 11. Starost učesnika u anketiranju o potrošnji slatkiša

Godine	Broj anketiranih	Kumulativ "ispod"
26 - 32	3	3
32,1 – 38	6	9
38,1 – 44	8	17
44,1 – 50	23	40
50,1 – 56	2	42
56,1 – 62	2	44
62,1 i više	1	45
Σ	45	-

Izvor: Istraživanje autora

Rešenje:

$$Položaj\ Me = \frac{45+1}{2} = \frac{46}{2} = 23$$

$$Me = 44{,}1 + \frac{\frac{45}{2} - 17}{23} * 6 = 44{,}1 + \frac{22{,}5 - 17}{23} * 6 = 44{,}1 + \frac{5{,}5}{23} * 6$$

$$Me = 44{,}1 + 0{,}24 * 6 = 44{,}1 + 1{,}44 = 45{,}54$$

Odgovor: Polovina ispitanika ima manje od 45,54 godina, a druga polovina više.

Medijana kao mera centralne tendencije ima određene *prednosti*:[35]

- Za razliku od aritmetičke sredine na vrednost mediane ne utiču ekstremne vrednosti zbog čega je medijana pogodnija mera centralne tendencije u odnosu na aritmetičku sredinu kada skup sadrži ekstremne male ili ekstremne velike vrednosti obeležja.
- Još jedna prednost medijane je u tome što ona može biti precizno određena čak i u situacijama kada je intervalna serija podataka data sa otvorenim prvim ili poslednjim intervalom.
- Takođe, u slučaju kada serija podataka sadrži kvalitativne vrednosti obeležja medijana je jedina mera centralne tendencije koja može biti upotrebljena.
- Vrednost medijane može biti određena i grafički za razliku od vrednosti aritmetičke sredine koja se izračunava samo pomoću formule.

MODUS

Mod (modus) je „vrednost koja se javlja sa najvećom frekvencijom u seriji podataka."[36] Modus verodostojno prezentuje srednju vrednost homogenih statističkih skupova. Njegova vrednost može biti utvrđena kod numeričkih serija podataka. Ukoliko u seriji podataka postoji samo jedna vrednost obeležja sa najvećom frekvencijom, onda je reč o unimodalnoj seriji, a ako postoje dve ili više takvih vrednosti serija je bimodalna, tj. multimodalna.

Modus ne može biti određen u situaciji kada sve vrednosti obeležja imaju međusobno jednake frekvencije. Kod serije podataka koja ima atributivna obeležja modus se određuje na isti način kao kod numeričkih obeležja. Na veličinu modusa ne utiče promena frekvencija sve dok se ne menja najveća frekvencija vrednosti obeležja. Ukoliko je uzorak mali modus nije baš najpogodnija mera centralne tendencije.

Kada je u pitanju prosta distribucija frekvencije modus predstavlja onu vrednost obeležja koja ima najveću frekvenciju.

---

[35] Bary, G. C. 2010. *Business statistics, 3rd Edition,* Tata McGraw-Hill Education, New Delhi, pp. 94.
[36] Mann, P., 2009. *Uvod u statistiku,* Ekonomski fakultet, Beograd, str. 89.

Izračunavanje modusa na osnovu grupisanih podataka (prosta distribucija frekvencija) **Primer 10.**

Na osnovu podataka u tabeli 8. izračunajte modus.

Rešenje:

Najveća frekvencija je 52, pa je vrednost obeležja koja odgovara datoj frekvenciji 2.

Odgovor: Najveći broj domaćinstava na teritoriji Republike Srbije ima prrosečno 2 člana domaćinstva.

Za intervalnu distributivnu frekvenciju vrednost modusa određuje se primenom sledećeg obrasca:

$$Mo = l + \frac{f_2 - f_1}{(f_2 - f_1) + (f_2 - f_3)} * i$$

l – donja granica modalnog intervala, *i* – širina intervala,

f1 – frekvencija modalnog intervala, *f2* – frekvencija predmodalnog intervala

f3 – frekvencija postmodalnog intervala.

Izračunavanje modusa na osnovu grupisanih podataka (intervalna serija podataka) **Primer 11.**

Na osnovu podataka u tabeli 4. koja je obrađena u prvom delu i data u nastavku izračunajte modus.

Tabela 12. Starost učesnika u anketiranju o potrošnji slatkiša

Godine	Broj anketiranih
26 - 32	3
32,1 – 38	6
38,1 – 44	8
44,1 – 50	23
50,1 – 56	2
56,1 – 62	2
62,1 i više	1
Σ	45

Izvor: Istraživanje autora

Rešenje:

$$Mo = 44{,}1 + \frac{23-8}{(23-8)+(23-2)} * 6 = 44{,}1 + \frac{15}{15+21} * 6$$

$$Mo = 44{,}1 + \frac{15}{36} * 6 = 44{,}1 + \frac{15}{6} = 44{,}1 + 2{,}5 = 46{,}6$$

Odgovor: Najveći broj ispitanika ima 46,6 godina.

MERE DISPERZIJE

Mere varijacije (disperzije) predstavljaju pokazatelje odstupanja vrednosti obeležja od prosečne vrednosti obeležja. Ukoliko je mala varijabilnost obeležja koji je predmet posmatranja možemo slobodno smatrati da aritmetička sredina verodostojno reprezentuje posmatrano obeležje. Srednja vrednost posmatranog obeležja biće loš predstavnik tog obeležja ukoliko je prisutan veliki varijabilitet.[37]

U statističkoj teoriji i praksi postoji više podela mera disperzije. Tako, *mere varijacije možemo podeliti* na:

- pozicione i
- izračunate;
- apsolutne, gde spadaju:
  - razmak varijacije,
  - srednje apsolutno odstupanje,
  - varijansa,
  - standardna devijacija.
- relativne, gde ubrajamo:
  - relativna varijacija,

[37] Vuković, N., Spasić, S., 2011. *Statistika za inžinjere*, Univerzitet Singidunum, Beograd, str. 47.

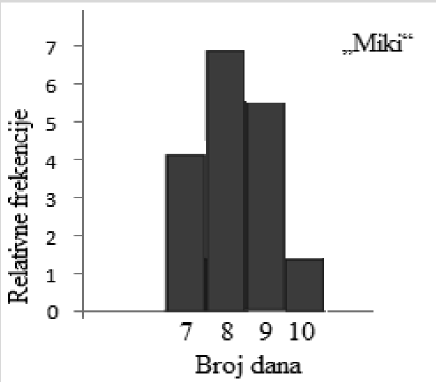
-koeficijent varijacije,

-relativna devijacija.

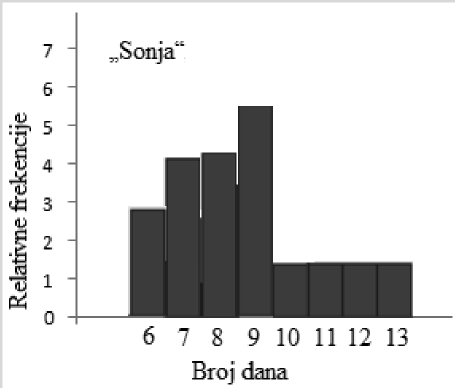
Mere disperzije mogu razrešiti dilemu i olakšati donošenje poslovnih odluka u situaciji kada su za dve alternative jednake vrednosti koja se dobija primenom izračunatih i pozicionih srednjih vrednosti. Na osnovu hipotetičkog primera koji je dat u nastavku uočava se koja je svrha primene mera disperzije.

Ukoliko pođemo od pretpostavke da smo mi preduzeće „Lea“ koje nabavlja proizvode od dva dobavljača iz zemlje: „Miki“ i „Sonja“, kao i da je prosečna vrednost broja dana neophodnih za popunjavanje narudžbenice jednaka za oba dobavljača, primenom mera varijacije donećemo odluku o tome kom dobavljaču treba dati prednost. U nastavku je dat grafički prikaz rasporeda broja dana neophodnih za popunjavanje narudžbenica za pomenute dobavljače.

Grafikon 13.



Grafikon 14.



Na osnovu grafičkih prikaza uočavamo da je manja disperzija kod dobavljača “Miki” u odnosu na dobavljača “Sonja”. Broj dana potrebnih za obradu narudžbenice za dobavljača “Miki” kreće se od 8 do 11. Kod dobavljača “Sonja” dobro je što imamo i manji broj dana potrebnih za obradu (od 6 do 8 dana), međutim, veliki broj dana obrade kao što je 12 i 13 dana iziskuju veće angažovanje radne snage što nije dobro. Na osnovu svega navedenog preporučujemo izbor dobavljača “Miki” jer ima manju varijabilnost u odnosu na dobavljača “Sonja”.

Mere varijabiliteta obeležja imaju neke posebne karakteristike. Načelno se mogu izdvojiti sledeće:[38]

-Vrednost mera disperzije zavisi od disperzije podataka na osnovu kojih se ona računa. Kada je veća disperzija podataka, veća je vrednost mera disperzije i obrnuto.

[38] Šekarić, M. 2010. *Statističke metode*, Univerzitet Singidunum, Beograd, str. 51.

-Mere disperzije uzimaju vrednost nula ukoliko su sve vrednosti obeležja međusobno jednake.

-Nijedna od mera disperzije ne mogu imati negativnu vrednost.

APSOLUTNE MERE DISPERZIJE

Razmak varijacije predstavlja meru disperzije koja se dobija kao razlika između najveće i najmanje vrednosti obeležja:

$$R = Xmax - Xmin$$

Krajnje vrednosti posmatrane serije određuju razmak varijacije. Bazira se samo na dve vrednosti obeležja (ekstremne vrednosti) i ne obuhvata sve podatke posmatrane serije podataka. Zbog toga ne pruža uvid u distribuciju podataka posmatrane serije. Kada je serija podataka data sa otvorenim intervalima nije moguće odrediti ovu meru disperzije.

Razmak varijacije predstavlja pogodnu meri disperzije kod malih uzoraka i u situaciji kada je u kratkom roku neophodna informacija o varijabilnosti skupa podataka. Ova mera disperzije nalazi primenu u kontroli kvaliteta gde se vrši kontinuirana provera varijabilnosti sirovina ili gotovih proizvoda. Takođe, meteorološko odeljenje koristi ovu meru disperzije prilikom ocene vremenske prognoze, jer daje informacije o kretanju minimalne i maksimalne temperature.

Kada statistički skup sadrži ekstremne vrednosti kao dopunska mera varijacije može se koristiti *interkvartalna razlika*. Zbog pojave ekstremnih vrednosti iz ukupne populacije neophodno je izdvojiti određeni procenat podataka u čemu pomažu kvartili. Može se izračunavati razlika između trećeg i prvog kvartala ili polukvartalna razlika kao polovina interkvartalne razlike.

$$Rq = Q_3 - Q_1$$

Srednje apsolutno odstupanje predstavlja „prosek apsolutnih odstupanja vrednosti obeležja od vrednosti aritmetičke sredine"[39] i obračunava se pomoću sledećih obrazaca:

- za negrupisane podatke:

[39] Weiers, R., 2008. *Introduction to Business Statistics,* 6th *Edition,* Thomson South-Western, USA, pp. 71.

$$SD = \frac{\sum_{i=1}^{N} |x_i - \overline{x}|}{N},$$

- za grupisane podatke:

$$SD = \frac{\sum_{i=1}^{N} f_i |x_i - \overline{x}|}{N}.$$

Značajno mesto u statistici zauzimaju *centralni momenti K–tog reda* (*K*= 1, 2, 3, 4, . . .), i predstavljaju „srednju meru odstupanja pojedinih vrednosti obeležja od aritmetičke sredine stepenovana brojevima 0, 1, 2, ...k."[40]

Matematički se mogu izraziti sledećim formulama:

- za negrupisane podatke:

$$M_k = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^k}{N},$$

- za grupisane podatke:

$$M_k = \frac{\sum_{i=1}^{N} f_i (x_i - \overline{x})^k}{N}$$

Varijansa je još jedna mera varijabiliteta posmatranog obeležja. „Varijansa populacije predstavlja sumu kvadrata razlika između svakog opažanja i sredine populacije, podeljenu s dimenzijom populacije, N."[41] Ona predstavlja prosečno kvadratno odstupanje vrednosti obeležja od aritmetičke sredine. Obračun varijanse zavisi od toga da li su u pitanju:

- negrupisani podaci:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2}{N},$$

- grupisani podaci:

[40] Stojković, M., 1995. Statistika za menadžere, Ekonomski fakultet u Subotici, Subotica, str. 156.

[41] Newbold, P., Carlson, W., Thorne, B., 2010. *Statistika za poslovanje i ekonomiju*, Mate, Zagreb, str. 53.

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} f_i (x_i - \overline{x})^2}{N}.$$

Nedostatak varijanse koji se ogleda u kvadriranju odstupanja vrednosti obeležja od aritmetičke sredine otklanja se primenom druge mere varijabiliteta vrednosti obeležja, a to je *standardna devijacija*.

Standardna devijacija „daje pregled udaljenosti pojedinačnih vrednosti obeležja od prosečne vrednosti."[42] S obzirom na to da standardna devijacija predstavlja prosečnu udaljenost vrednosti obeležja od aritmetičke sredine neke vrednosti obeležja su bliže vrednosti standardne devijacije, dok su druge vrednosti obeležja dalje od te vrednosti. Ona predstavlja minimalno srednje odstupanje vrednosti obeležja od aritmetičke sredine i izračunava se kao kvadratni koren veličine varijanse:

- za negrupisane podatke:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2}{N}} \quad \text{ili} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} x^2}{N} - \overline{x}^2},$$

- za negrupisane podatke:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} f_i * (x_i - \overline{x})^2}{N}} \quad \text{ili} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} f_* x^2}{N} - \overline{x}^2}.$$

Obrazac koji se koristi za obračun standardne devijacije i varijanse kod grupisanih podataka primenjuje se i kod intervalne serije podataka s tom razlikom što se umesto vrednosti obeležja x_i koriste vrednosti sredina intervala x_s.

Izračunavanje apsolutnih mera disperzije na osnovu grupisanih podataka (prosta distribucija frekvencija) **Primer 12.**

Na osnovu podataka u tabeli 13. izračunajte varijansu i standardnu devijaciju.

[42] Siegel, A., 2012. *Practical Business Statistics*, 6th *Edition*, Elsevier Inc., USA, pp. 98.

Tabela 13. Prosečan broj članova po domaćinstvu u Republici Srbiji

Prosečan broj članova po domaćinstvu (x_i)	**Broj domaćinstava (f_i)**	x_i*f_i	x^2	$f*x^2$
1	16	16	1	16
2	52	104	4	208
3	36	108	9	324
4	10	40	16	160
5	6	30	25	150
6	1	6	36	36
Σ	121	304	-	894

Izvor: Domaćinstva prema broju članova po naseljima, popis 2011., dostupno na: http://popis2011.stat.rs/?page_id=2162, [09.02.2016. u 18:00]

Rešenje:

$$m = \frac{304}{121} = 2{,}51 \qquad \sigma^2 = 1{,}09$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{894}{121} - 2{,}51^2} = \sqrt{7{,}39 - 6{,}3} = \sqrt{1{,}09} = 1{,}044$$

Odgovor: Prosečno kvadratno odstupanje prosečnog broja članova domaćinstva u Republici Srbiji od aritmetičke sredine iznosi 1,09. Minimalno prosečno odstupanje prosečnog broja članova domaćinstva u Republici Srbiji od aritmetičke sredine iznosi 1,044.

EMPIRIJSKO PRAVILO I ČOBIŠOVLJEVA TEOREMA

Empirijsko pravilo daje ocenu procenta posmatrane populacije koji se nalazi na udaljenosti od jedne, dve ili tri standardne devijacije.[43] Ovo pravilo može se primeniti samo za seriju podataka koja ima normalan raspored (raspodela ima oblik zvona). Važe sledeća pravila kako za podatke iz skupa, tako i za podatke iz uzorka:[44]

[43] Newbold, P., Carlson, W., Thorne, B., 2010. *Statistika za poslovanje i ekonomiju*, Mate, Zagreb, str. 56.
[44] Mann, P., 2009. *Uvod u statistiku,* Ekonomski fakultet, Beograd, str. 115.

- oko 68% vrednosti obeležja nalazi se u opsegu jedne standardne devijacije od prosečne vrednosti obeležja,
- oko 95% vrednosti obeležja nalazi se u opsegu dve standardne devijacije od prosečne vrednosti obeležja,
- oko 99,7% vrednosti obeležja nalazi se u opsegu tri standardne devijacije od prosečne vrednosti obeležja.

Svaka vrednost obeležja koja se razlikuje od aritmetičke sredine za više od tri standardne devijacije predstavlja ekstremnu vrednost.

Čobišovljeva teorema predstavlja donju granicu površine ispod krive koja se nalazi između dve tačke na podjednakoj udaljenosti od aritmetičke sredine. Drugim rečima, samo za bilo koje k veće od 1, najmanje $1\text{-}1/k^2$ vrednosti podataka nalazi se u opsegu k standardnih devijacija od prosečne vrednosti posmatranog obeležja.[45] Ova teorema može se primeniti na sve oblike rasporeda. Ovo pravilo se može zapisati na sledeći način:[46]

$$Najmanje\ 100 * \left[1 - \left(\frac{1}{k^2}\right)\right]$$

Izabrane vrednosti od k	1,5	2	2,5	3
$[1\text{-}(1/k^2)]\%$	55,6%	75%	84%	88,9%

RELATIVNE MERE DISPERZIJE

Ukoliko želimo da poredimo dva obeležja koja su izražena u različitim jedinicama mere varijansu možemo izraziti u relativnom obliku na sledeći način:

$$V_{x^2} = \frac{\sigma^2}{\overline{x}^2}$$

Koeficijent varijacije predstavlja relativnu meru varijabiliteta vrednosti obeležja koji se dobija deljenjem standardne devijacije sa aritmetičkom sredinom i množenjem količnika sa 100%. Za njegovu primenu značajno je da sve vrednosti obeležja budu pozitivne.[47]

---

45 Mann, P., 2009. *Uvod u statistiku,* Ekonomski fakultet, Beograd, str. 113.

46 Newbold, P., Carlson, W., Thorne, B., 2010. *Statistika za poslovanje i ekonomiju*, Mate, Zagreb, str. 56.

47 Siegel, A., 2012. *Practical Business Statistics*, 6^{th} *Edition*, Elsevier Inc., USA, pp. 108.

$$V_x = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

Kada se u seriji podataka javljaju ekstremne vrednosti koeficijent varijacije može imati veću vrednost od 100%. Ukoliko je vrednost koeficijenta varijacije veća to znači da je veći varijabilitet vrednosti obeležja oko aritmetičke sredine.

Koeficijent varijacije omogućava poređenje varijacija vrednosti prodaje u odnosu na aritmetičku sredinu kod velikog i malog preduzeća. Iako apsolutne mere varijacije (standardna devijacija i varijansa) imaju veće vrednosti kod velike firme u odnosu na vrednosti tih parametara kod male firme relativna mera varijacije može pokazati isti varijabilitet vrednosti obeležja od aritmetičke sredine kod oba preduzeća. Upoređivanje varijabiliteta podataka više različitih serija može se vršiti pomoću koeficijenta interkvartalne varijacije koji se dobija na sledeći način:

$$V_Q = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \text{ gde je } (0 < V_Q < 1)$$

Na osnovu prethodnog primera 12. obračunajte koeficijent varijacije.

$m = 2{,}51$ $\sigma = 1{,}044$

$$V_x = \frac{1{,}044}{2{,}51} = 0{,}4159 * 100\% = 41{,}59\%$$

Odgovor: Prosečno procentualno odstupanje prosečnog broja članova domaćinstva u Republici Srbiji od aritmetičke sredine iznosi 41,59%.

MERE OBLIKA RASPOREDA

Varijacije vrednosti obeležja utiču na *asimetričnost* i *spljoštenost* rasporeda. U normalnoj raspodeli asimetrija i spljoštenost imaju vrednost jednaku nuli, ali to se retko sreće u društvenim naukama.[48] Asimetriju i

[48] Pallant, J., 2009. *SPSS Priručnik za preživljavanje, Prevod 3. izdanja,* Mikro knjiga, Beograd, str. 58.

spljoštenost treba proveravati za uzorke koji su manji od 200 elemenata. Kada je uzorak razumno veliki asimetričnost „nema znatnijeg uticaja na rezultate analize”.[49] Spljoštenost rasporeda može da prouzrokuje veoma nisku vrednost standardne devijacije.

Koeficijent asimetrije odražava asimetriju rasporeda. Ovaj koeficijent obeležava se sa α_3 i izračunava se kao količnik centralnog momenta trećeg reda i trećeg stepena standardne devijacije:

$$\alpha_3 = \frac{M_3}{\sigma_3}$$

Ukoliko kao rezultat analize dobijemo pozitivne vrednosti asimetrije, to znači da je većina rezultata koje smo dobili levo od aritmetičke sredine, među vrednostima koje su manje. Kod negativne vrednosti asimetrije važi obrnuto. Na osnovu vrednosti dobijenog koeficijenta možemo odrediti asimetričnost rasporeda i to:

- kada je $\alpha_3=0$ onda je raspored simetričan,
- kada je $\alpha_3>0$ raspored je asimetričan udesno („pozitivna asimetrija“),
- kada je $\alpha_3<0$ raspored je asimetričan ulevo („negativna asimetrija“).

Koeficijent spljoštenosti odražava spljoštenost rasporeda. Ovaj koeficijent obeležava se sa α_4 i izračunava se kao količnik centralnog momentra četvrtog reda i četvrtog stepena standardne devijacije:

$$\alpha_4 = \frac{M_4}{\sigma_4}$$

Ukoliko kao rezultat analize dobijemo pozitivne vrednosti spljoštenosti, to znači da je većina rezultata nagomilana oko centra raspodele i raspodela je šiljatija od normalne raaspodele. Kod negativne vrednosti spljoštenosti važi obrnuto. Na osnovu vrednosti dobijenog koeficijenta možemo odrediti spljoštenost rasporeda i to:

- kada je $\alpha_4=3$ onda je raspored je normalno spljošten,
- kada je $\alpha_4>3$ raspored je više izdužen, a manje spljošten,
- kada je $\alpha_4<3$ raspored je više spljošten, a manje izdužen.

[49] Tabachnik, G., Fidell, S., 2007. *Using multivariate statistics,* Pearson/Allyn & Bacon, Boston, str. 80.

Izračunavanje koeficijenata asimetrije i spljoštenosti na osnovu grupisanih podataka (prosta distribucija frekvencija) **Primer 13.**

Na osnovu podataka u tabeli 14. izračunajte asimetriju i spljoštenost rasporeda.

Tabela 14. Prosečan broj članova po domaćinstvu u Republici Srbiji

x_i	f_i	x_i*f_i	x^2	f_i*x^2	$(x_i-\overline{X})^3$	$(x_i-\overline{X})^4$	$f*(x_i-\overline{X})^3$	$f*(x_i-\overline{X})^4$
1	16	16	1	16	-1,51	2,51	-24,16	40,16
2	52	104	4	208	-0,51	5,02	-26,52	261,04
3	36	108	9	324	0,49	7,53	17,64	271,08
4	10	40	16	160	1,49	10,04	14,9	100,4
5	6	30	25	150	2,49	12,55	14,94	75,3
6	1	6	36	36	3,49	15,06	3,49	15,06
Σ	121	304	-	894	-	-	0,29	763,04

Izvor: Domaćinstva prema broju članova po naseljima, popis 2011., dostupno na: http://popis2011.stat.rs/?page_id=2162, [09.02.2016. u 18:00]

Rešenje:

$$m = \frac{304}{121} = 2{,}51$$

$$\sigma = 1{,}044$$

$$M_3 = \frac{0{,}29}{121} = 0{,}0024$$

$$M_4 = \frac{763{,}04}{121} = 6{,}31$$

$$\alpha_3 = \frac{0{,}0024}{1{,}044^3} = \frac{0{,}0024}{1{,}14} = 0{,}0021$$

$$\alpha_4 = \frac{6{,}31}{1{,}044^4} = \frac{6{,}31}{1{,}19} = 5{,}30$$

Odgovor: Na osnovu rezultata analize koeficijent asimetrije iznosi 0,0021 i veći je od nule, ali blizu nuli, pa je prisutna blaga pozitivna asimetrija, dok koeficijent spljoštenosti ima vrednost 5,30 i veći je od 3 što znači da je raspored više izdužen, a manje spljošten.

PITANJA ZA DISKUSIJU

- ✓ Šta pokazuju mere centralne tendencije?
- ✓ Koje su karakteristike srednjih vrednosti?
- ✓ Objasnite pojam i karakteristike aritmetičke sredine.
- ✓ Koji uslovi moraju biti ispunjeni da bi se obračunala aritmetička sredina?
- ✓ Koje su prednosti, a koji nedostaci aritmetičke sredine kao mere centralne tendencije?
- ✓ Za koje serije podataka je najpogodnija geometrijska sredina?
- ✓ Šta pokazuje geometrijska sredina, a šta geometrijska stopa rasta?
- ✓ Kada se koristi harmonijska sredina?
- ✓ Šta predstavlja medijana?
- ✓ Koje su prednosti medijane?
- ✓ Šta predstavlja modus?
- ✓ Koje su karakteristike modusa kao pozicione srednje vrednosti?
- ✓ Pojam i podela mera varijacije?
- ✓ Kako mere disperzije olakšavaju donošenje poslovnih odluka?
- ✓ Koje su karakteristike mera varijacije?
- ✓ Koje su karakteristike i primena razmaka varijacije?
- ✓ Koje su prednosti primene interkvartilne razlike?
- ✓ Šta predstavlja srednje apsolutno odstupanje?
- ✓ Šta predstavlja centralni momenat k-tog reda?
- ✓ Definišite varijansu.
- ✓ Definišite standardnu devijaciju.
- ✓ Objasnite Empirijsko pravilo.
- ✓ Objasnite Čobišovljevu teoremu.
- ✓ Koje su prednosti primene relativnih mera disperzije?
- ✓ Šta pokazuje koeficijent asimetrije?
- ✓ Kako glase pravila za određivanje asimetričnosti rasporeda?
- ✓ Šta pokazuje koeficijent spljoštenosti?
- ✓ Kako glase pravila za određivanje spljoštenosti rasporeda?
- ✓ U kom slučaju nije moguće odrediti modus?
- ✓ Kada nije moguće obračunati harmonijsku sredinu?
- ✓ Koji uslovi moraju biti ispunjeni da bi se obračunala geometrijska sredina?
- ✓ Objasnite postupak obračuna medijane.

3.

VEROVATNOĆA U STATISTICI I MODELI TEORIJSKIH RASPOREDA SLUČAJNIH PROMENLJIVIH

STATISTIČKA DEFINICIJA VEROVATNOĆE
NEZAVISNI I ZAVISNI DOGAĐAJI
USLOVNA I TOTALNA VEROVATNOĆA

MODELI PREKIDNIH TEORIJSKIH RASPOREDA
MODELI NEPREKIDNIH TEORIJSKIH RASPOREDA

POJAM I VRSTE VEROVATNOĆE

Teorija verovatnoće se bavi zakonitostima koje se uočavaju nakon velikog broja ponovljenih eksperimenata. U pitanju je matematička disciplina koja izučava zakonitosti slučajnih pojava. Numerička mera objektivne mogućnosti da se posmatrani događaj ostvari predstavlja *verovatnoću.*

Statistička teorija verovatnoće predstavlja deo teorije verovatnoće kojim se koristi statistika. Statističke ili stohastičke pojave predstavljaju pojave kod kojih se ne može sa sigurnošću tvrditi kada će nastati i kakvi će njihovi međusobni odnosi biti. *Statistika povezuje matematičke modele sa eksperimentalnim podacima zbog čega je ona bliža realnosti od verovatnoće.* Tako je statistika pogodna za predviđanje budućnosti jer njenom primenom može se na najbolji način odrediti koliko je potrebno novca, vremena, resursa za realizaciju nekog projekta.

Slučajni eksperimenti (statistički ili stohastički) predstavljaju eksperimente čiji rezultati ne mogu biti pouzdano predviđeni. *Slučajni događaj* je ishod slučajnog eksperimenta (statističkog ili stohastičkog eksperimenta). Slučajni događaj može, ali i ne mora da se dogodi.

Pored slučajnog događaja postoji i siguran događaj. *Siguran događaj* je onaj koji se javlja svaki put kada se dati eksperiment vrši. Ukoliko se pri realizaciji eksperimenta nikada ne može pojaviti neki događaj reč je o *nemogućem događaju.*

Ukoliko pođemo od pretpostavke da su A i B slučajni događaji, važi sledeće:

- Ukoliko važi $C = A \cap B = AB$, onda se događaj C realizuje ako i samo ako se istovremeno realizuju događaji A i B.
- Ukoliko važi $C = A \cup B$, važi onda se događaj C realizuje ako i samo ako se realizuje bar jedan događaj A ili B.
- Kada se realizacijom događaja A realizuje i događaj B onda je događaj A podskup skupa B ($A \subset B$).
- Događaji A i B su jednaki (A=B) kada važi $A \subset B$ i $B \subset A$.
- Događaj A\` koji se realizuje ako i samo ako se događaj A ne realizuje predstavlja suprotan događaj događaja A.
- U slučaju kada se događaji A i B ne mogu istovremeno realizovati onda se oni međusobno isključuju i tada važi

sledeće: $A \cap B = \varnothing$.

U situaciji kada ostvarivanje događaja B utiče na realizaciju događaja A onda je događaj A zavisan od događaja B. U suprotnom događaji A i B su nezavisni.

Pod uslovom da se događaj B ostvario *uslovna verotavnoća* događaja A definiše se na sledeći način:[50]

$$P_{(A/B)} = \frac{P_{(A \cap B)}}{P_{(B)}} \text{ ako je } P_{(B)} > 0$$

.

Ukoliko je događaj A nezavistan od događaja B i obratno, to se definiše na sledeći način:

$$P_{(A \cap B)} = P_{(A)} * P_{(B)} \text{ ili } P_{(A/B)} = P_{(A)} \text{ ili } P_{(B/A)} = P_{(B)}.$$

Ako događaji A_1, A_2,..., A_i čine potpuni sistem hipoteza u odnosu na događaj A onda formula *potpune verovatnoće* ima sledeći oblik:

$$P\ (B) = \sum_{i=1}^{n} P(Ai) * P(B/Ai)$$

Oslanjajući se na pojam relativne frekvencije može se doći do pojma verovatnoće. Ukoliko pođemo od pretpostavke da se događaj A može realizovati u eksperimentu koji se ponavlja *n* puta i da je *f* broj povoljnih realizacija događaja A u *n* ponavljanja eksperimenta, broj *P=f/n* predstavlja relativnu učestalost pojave događaja A u eksperimentu koji se ponavlja *n* puta.

U drugoj seriji ponavljanja istog eksperimenta dobiće se neki drugi broj koji predstavlja relativnu učestalost pojave događaja A u eksperimentu koji se ponavlja određeni broj puta.

Ponavljanjem eksperimenta neograničeno veliki broj puta dobija se niz različitih vrednosti koje se grupišu oko nekog broja P(A) koji se naziva statistička definicija verovatnoće.

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{f}{n}$$

Posmatrajući prostu distribuciju frekvencija statistička definicija verovatnoće može se zapisati na sledeći način:

-Prosta distribucija frekvencija:

$$x : x_1, x_2, x_3, ..., x_k$$

[50] Sahoo, P., 2013. *Probability and mathematical statistics,* University of Louisville, USA, p. 32.

$$f : f_1, f_2, f_3, ..., f_k$$

-Zakon verovatnoće:

$$x : x_1, x_2, x_3, ..., x_k$$

$$p : p_1, p_2, p_3, ..., p_k;$$

gde je: $Pi = fi / n$;

-Statistička verovatnoća u vidu relativnih frekvencija:

$$N = \sum_{i=1}^{k} fi \quad ; \qquad \sum_{i=1}^{k} p_1 = 1$$

-Model zakona verovatnoće:

$$p_1 = f(x_i), \text{ i=1, 2, 3, ..., k.}$$

MODELI PREKIDNIH I NEPREKIDNIH TEORIJSKIH RASPOREDA

Modeli teorijskih rasporeda slučajnih promenljivih opisuju posmatranu slučajnu promenljivu. Najčešće nam nije poznata veza između vrednosti slučajne promenljive X i njenog teorijskog rasporeda slučajnih promenljivih. Razlikujemo dva osnovna modela teorijskih rasporeda slučajnih promenljivih:

- Modeli prekidnih teorijskih rasporeda i
- Modeli neprekidnih teorijskih rasporeda.

Kada je reč o modelima prekidnih teorijskih rasporeda najznačajniji su:

- Bernulijev raspored verovatnoće,
- Binomni raspored verovatnoće i
- Puasonov raspored verovatnoće.

Od neprekidnih teorijskih rasporeda izdvajamo:

- Normalan raspored verovatnoće,

- χ^2 raspored verovatnoće,
- Studentov t raspored verovatnoće i
- Snedekorov raspored verovatnoće.

MODELI PREKIDNIH TEORIJSKIH RASPOREDA

Bernulijev raspored verovatnoće

Slučajna promenljiva *X* ima Bernulijev raspored verovatnoće ukoliko uzima samo dve vrednosti 1 i 0 kojima odgovaraju verovatnoće *p* i *q* pod uslovom da je $p + q = 1$.

X	0	1
P(x)	p	Q

Bernulijev raspored je koristan za eksperimente kojima se testira realizacija jednog događaja jer ima samo jedan parametar raspodele *p* takav da je $0<p<1$.

Matematički se iskazuje kao:

$$X = E(X) = V \text{ i } \sigma^2 = p*q$$

Binomni raspored verovatnoće

Binomnu raspodelu verovatnoće slučajne promenljive *X* karakterišu dva parametra:

- *n* koji predstavlja broj nezavisnih ponavljanja eksperimenta i
- *p* koji predstavlja verovatnoću uspeha.

Slučajna promenljiva *X* ima Binomnu raspodelu verovatnoće sa parametrima (*n, p*) ako i samo ako je:[51]

$$P(X = x) = p(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x},$$

[51] Ramachandran, K., Tsokos, C., 2009. *Mathematical Statistics with Applications*, Elsevier Academic Press, USA, p. 115.

pod uslovom da je x = 0, 1, 2, ..., n; $0 \leq p \leq 1$ i $q = 1 - p$.

Ovaj raspored predstavlja binomnu ekspanziju izraza $(p + q)^n$.

Aritmetička sredina binomne slučajne promenljive je:

$$E(X) = \overline{X} = n*p$$

Varijansa slučajne promenljive je:

$$\sigma^2_{(x)} = n*p*q.$$

Koeficijent varijacije slučajne promenljive je:

$$Vx = \sqrt{\frac{q}{n*p}}.$$

Koeficijent asimetrije slučajne promenljive je:

$$\alpha_3 = \frac{q - p}{\sqrt{n*p*q}}.$$

Koeficijent spljoštenosti slučajne promenljive je:

$$\alpha_4 = 3 + \frac{1 - 6 *p*q}{n*p*q}.$$

Puasonov raspored verovatnoće

Puasonov raspored verovatnoće slučajne promenljive *X* naziva se i rasporedom retkih događaja zbog toga što je verovatnoća *p* sasvim mala kada je *n* veliki. Najčešće se ovaj raspored koristi u situaciji kada je $p \leq 0{,}1$ i $n \geq 40$, a ukoliko je $n*p < 5$ Puasonov raspored se približava Binomnom rasporedu.

Jedini parametar Puasonovog rasporeda je prosečan broj javljanja u jedinici vremena označen sa θ. Slučajna promenljiva uzima beskonačno mnogo celih brojeva od 0, 1, 2, 3, ..., k, ..., sa verovatnoćama:

$$P(k) = P(X = k) = \frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta}$$

Aritmetička sredina jednaka je varijansi:

$$E(X) = \sigma^2 = \theta$$

Koeficijent varijacije je:

$$V(x) = \frac{\sqrt{\theta}}{\theta}$$

Koeficijent asimetrije je:

$$\alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{\theta}}$$

Koeficijent spljoštenosti je:

$$\alpha_4 = 3 + \frac{1}{\theta}.$$

MODELI NEPREKIDNIH TEORIJSKIH RASPOREDA

Normalan raspored verovatnoće

Normalan raspored verovatnoće slučajne promenljive se najčešće primenjuje u statistici, posebno u statističkom zaključivanju na bazi uzorka. Ukoliko je $n*p \geq 5$ i $n*(1-p) \geq 5$ Puasonov i Binomni raspored teže normalnom rasporedu.

Veliki broj slučajnih promenljivih aproksimativno ima normalan raspored, a one slučajne promenljive koje nemaju ni približno normalan raspored mogu lako biti transformisane na normalnu slučajnu promenljivu. Normalan raspored je baza za parametarsko statističko zaključivanje.

Formula zakona verovatnoće slučajne promenljive X koja ima normalan raspored i uzima vrednosti iz intervala $(-\infty; +\infty)$ data je u nastavku:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}} e^{\frac{-(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} .$$

Uz pomoć integrala dobija se očekivana vrednost Normalnog rasporeda slučajne promenljive:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} dt .$$

Iz opšteg oblika rasporeda dobija se standardizovani oblik normalnog rasporeda uvođenjem sledeće smene:

$$Z = \frac{X - \bar{x}}{\sigma}.$$

Dakle, za svaku vrednost slučajne promenljive X dobija se odgovarajuća vrednost za slučajnu promenljivu Z koja ima normalan raspored N(0;1). Normalni raspored se najčešće označava sa X:N($\bar{x}$;σ^2).

Za vrednost aritmetičke sredine 0 i vrednost varijanse 1 standardizovani oblik normalnog rasporeda datim Gausovom krivom izgleda ovako:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{\frac{-z^2}{2}}$$

χ^2 raspored verovatnoće

χ^2 raspored predstavlja sumu kvadrata nezavisne slučajne promenljive X neprekidnog tipa iz intervala (0; +∞) koja ima Normalnu raspodelu N(0;1).

Verovatnoća χ^2 rasporeda pronalazi se iz odgovarajuće tablice tako što pročita vrednost za odgovarajući broj stepeni slobode ν i za dati broj α (0 < α <1). Tablica sadrži vrednosti za stepeni slobode od 1 do 30, a za veće vrednosti stepena slobode mogu se koristiti približne vrednosti tablice Normalnog rasporeda.

Slučajna promenljiva sa χ^2 rasporedom označava se kao:

$$X : \chi^2_n(X).$$

Kriva χ^2 rasporeda polazi iz koordinatnog početka, raste do modusa nakon čega opada i asimptotski se približava x osi.

χ^2 raspored teži simetričnoj raspodeli kada n →∞. Takođe, χ^2 raspored teži rasporedu koji je normalno spljošten.

Studentov t raspored verovatnoće

Zakon verovatnoće slučajne promenljive X koja ima Studentov raspored zapisuje se na sledeći način:

$$f_n(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi \cdot n} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

.

Funkcija F(x) je unimodalna i dostiže maksimum za t = 0 = Mo. Vrednost medijane je jednaka vrednosti modusa.

Za slučajne veličine Z : N (0;1) i nezavisne χ_n^2, slučajna veličina:

$$t_n = \frac{Z}{\sqrt{\frac{X_n^2}{n}}} \qquad (-\infty, +\infty)$$

ima *t* – raspored sa *n* stepeni slobode.

Za dati rizik greške α i dati broj stepeni slobode ν iz tablica *t* – rasporeda nalazi se broj $t_{n;1-(\alpha/2)}$.

$$P\left(|t_n| \geq t_{n;1-(\alpha/2)}\right) = \alpha$$

Studentov raspored je određen brojem stepeni slobode ν = n - 1. U slučaju kada n → +∞ Studentov raspored teži Normalnom rasporedu N(0;1), pa se za uzorke koji su veći od 30 koristi tablica Normalnog rasporeda.

Snedekorov raspored verovatnoće

Zakon verovatnoće neprekidna slučajna promenljiva X ima Snedekorov F raspored sa ν_1 i ν_2 stepeni slobode ima sledeći oblik:[52]

$$f(x;\nu_1,\nu_2) = \begin{cases} \dfrac{r\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{(\nu_1)}{2}} x^{\frac{(\nu_1)}{2}-1}}{r\left(\frac{\nu_1}{2}\right) r\left(\frac{\nu_2}{2}\right)\left(1+\frac{\nu_1}{\nu_2}x\right)^{\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}} \\ 0 \end{cases}$$

Za 0 ≤ x≤ ∞ i kada su ν_1 i ν_2 veći od nule.

Snedekorov F raspored ima sledeći oblik:

[52] Sahoo, P., 2013. *Probability and mathematical statistics,* University of Louisville, USA, p. 405.

$$X_{n_1,n_2} = \frac{X_{n_1}^2}{X_{n_2}^2},$$

$X_{n_1}^2$ - nepristrasna i nezavisna ocena varijanse skupa na osnovu jednog uzorka i

$X_{n_2}^2$ - nepristrasna i nezavisna ocena varijanse skupa na osnovu drugog uzorka.

ν_1 - predstavlja broj stepeni slobode veće varijanse dok

ν_2 - predstavlja broj stepeni slobode manje varijanse.

Aritmetička sredina ovog rasporeda je:

$$E(x) = \frac{\nu_1}{\nu_2 - 2}.$$

Varijansa Snedekorovog rasporeda je:

$$\sigma^2 = \frac{2\nu_1(\nu_1 + \nu_2 - 2)}{(\nu_1 - 2)^2(\nu_2 - 4)},$$

uz ispunjene sledeće uslove:

$(\nu_2 > 2)$, i $(\nu_2 > 4)$.

PITANJA ZA DISKUSIJU

- ✓ Objasnite teoriju verovatnoće.
- ✓ Objasnite statističku teoriju verovatnoće.
- ✓ Kako se zapisuje statistička definicija verovatnoće?
- ✓ Šta je slučajni eksperiment, a šta slučajni događaj?
- ✓ Koja je razlika između sigurnog događaja i nemogućeg događaja?
- ✓ Kako se definiše uslovna verovatnoća?
- ✓ Kako se zapisuje formula totalne verovatnoće?
- ✓ Prikažite kako se može izraziti veza između događaja pomoću skupovnih relacija.
- ✓ Navedite modele prekidnih teorijskih rasporeda verovatnoće.
- ✓ Navedite modele neprekidnih teorijskih rasporeda verovatnoće.
- ✓ Za koje eksperimente je koristan Bernulijev raspored verovatnoće?
- ✓ Koji parametri karakterišu Binomni raspored verovatnoće?
- ✓ Kako se drugačije naziva Puasonov raspored verovatnoće i kada se on najčešće koristi?
- ✓ Koji raspored verovatnoće slučajne promenljive se najčešće primenjuje u praksi i zašto?
- ✓ Kada χ^2 raspored teži simetričnoj raspodeli?
- ✓ Pod kojim uslovom Studentov raspored teži Normalnom rasporedu?
- ✓ Objasnite Snedekorov F raspored.

4.

STATISTIČKO ZAKLJUČIVANJE NA BAZI UZORKA

-OCENJIVANJE NEPOZNATIH PARAMETARA SKUPA

-aritmetičke sredine kada je varijansa skupa poznata i nepoznata, a uzorak mali i veliki

-proporcije osnovnog skupa na bazi uzorka

-varijanse osnovnog skupa na bazi uzorka

-TESTIRANJE HIPOTEZA O PARAMETRIMA SKUPA

-o aritmetičkoj sredini osnovnog skupa

-o proporciji osnovnog skupa

- χ^2 TEST, POJAM I OBLICI

-test oblika rasporeda i test nezavisnosti obeležja

POJAM I OBLASTI STATISTIČKOG ZAKLJUČIVANJA

Često je u naučnim istraživanjima nemoguće obuhvatiti sve elemente posmatranog skupa. Odluke se donose na osnovu opservacija i merenja koja nisu sveobuhvatna. Zbog nemogućnosti proučavanja celog statističkog skupa, stratističko istraživanje se svodi na jedan deo statističkog skupa koji se naziva uzorak. Uzorak je podobniji za analizu zbog finansijskih, organizacionih i tehničkih uslova. Velika se pažnja usmerava pažljivom odabiru vrste i veličine uzorka.

Statističko zaljučivanje zasniva se na primeni induktivnog i deduktivnog metoda za spoznaju relevantne istine koja je sadržana u pretpostavkama koje se odnose na realan svet. Naučnom obradom statističkih podataka i donošenjem zaključka koji se zasnivaju na takvim podacima možemo doći i do informacija koje se ne slažu s našim pretpostavkama. Statističkim zaključivanjem, a na osnovu izmerenih rezultata analize uzorka, donose se zaključci o parametrima osnovnog skupa.

Statističko zaključivanje obuhvata:

- ocene nepoznatih parametara osnovnog skupa (interval poverenja i tačkaste ocene);
- testiranje statističkih hipoteza o parametrima i raspodelama statističkog skupa.

Ocenjivanje parametara osnovnog skupa vrši se na osnovu poznatih parametara uzorka uz odgovarajući rizik greške. *Testiranje* hipoteze podrazumeva ispitivanje da li je unapred definisana pretpostavka o vrednosti parametara osnovnog skupa istinita ili ne. Na osnovu rezultata testiranja, a sa pouzdanošću manjom od 100% prihvatamo nultu ili alternativnu hipotezu. Nakon toga utvrđujemo da li smo prihvatili našu pretpostavku ili ne.

U postupku statističkog zaključivanja koriste se parametarske i neparametarske metode. Takođe, veoma je važno meriti pouzdanost statističkog zaključivanja, jer je u protivnom ono nepotpuno. Posebno je značajno obratiti pažnju kod određivanja vrednosti faktora pouzdanosti. Ukoliko se koristi veliki uzorak ($n \geq 30$) onda se kritična vrednost određuje na bazi Normalnog rasporeda i koristi se Z test. Kada je uzorak manji od 30 smatra se da je mali uzorak u pitanju i kritične vrednosti testa se određuju na bazi Studentovog t rasporeda i koristi se T test.

REPREZENTATIVNOST UZORKA I STATISTIČKE GREŠKE

Proces statističkog ocenjivanja mora biti precizan. To se obezbeđuje adekvatnim izborom uzorka. Uzorak na osnovu kojeg se vrši statističko ocenjivanje mora biti reprezentativan. Ukoliko je uzorak jednak osnovnom skupu možemo smatrati da je uzorak u potpunosti reprezentativan. Ovakav slučaj javlja se kod potpunog popisa. Međutim, analiza svih elemenata osnovnog skupa često nije finansijski isplativa i tehnički izvodljiva. Zbog toga se u praksi veličina uzorka udaljava od veličine skupa što može predstavljati problem kod heterogenih skupova.

Kod heterogenih skupova struktura uzoraka može odstupati od strukture skupa. Takođe, može se izdvojiti više uzoraka iste veličine, ali različite strukture i oni će dovesti do različitih rezultata ocene koja se vrši na osnovu njih. Ukoliko sagledamo sve vrste uzorka, slučajni uzorak pruža najviše sigurnosti s aspekta reprezentativnosti.

U procesu statističkog istraživanja javljaju se statističke greške. Statističke greške se ređe javljaju u prirodnim nego u društvenim naukama. U praksi se najčešće javljaju *slučajne* i *neslučajne* greške. Pored njih postoje i *nezakonite* greške. Takođe, razlikujemo *uzročne* i *neuzročne* greške.

Slučajne greške nastaju zbog toga što se elementi u uzorku biraju na slučajan način. Veličina slučajne greške predstavlja razliku između empirijske vrednosti parametra osnovnog skupa i ocenjene vrednosti parametra na bazi uzorka. S obzirom na to da uzorci različito reprezentuju osnovni skup jer se njihova struktura može razlikovati bez obzira na to što su iste veličine, slučajna greška se razlikuje za pojedinačne uzorke. Ukoliko je uzorak veći, slučajna greška je manja i obrnuto.

Neslučajne greške nastaju iz nepoznatih razloga i obično se otkrivaju u kasnijoj fazi analize. Ove greške su opasne jer mogu dovesti do loših zaključaka koje donosimo na osnovu statističke analize. Izbegavanjem neslučajnih grešaka obezbeđuje se reprezentativnost uzorka. Neslučajne greške mogu biti greške anketara prilikom upisivanja odgovora, tehničke greške prilikom obrade, greška zbog donošenja zaključka samo na osnovu jednog dela uzorka i slično.

Svaka statistička greška nosi sa sobom *moralni problem*. Ovi problemi se obično javljaju kod neslučajnih uzoraka. Ukoliko želimo da namerno utičemo na rezultate statističkog zaključivanja i zbog toga iz uzorka namerno isključimo neke elemente *greška prikrivanja postaje moralni problem*. *Greška* *neodgovaranja* je moralni problem kada ispitivač namerno formuliše ona pitanja za koja zna da na njih ispitanici neće dati odgovor i na taj način ih on svesno isključuje iz statističke analize. Ukoliko rezultate istraživanja proglasimo značajnim bez prethodne provere reprezentativnosti uzorka na osnovu kojeg se vršila statistička analiza *greška uzimanja uzorka postaje moralni problem.* Takođe, *kod greške merenja* može nastati *moralni problem.* Pogodni primeri za ovu situaciju su kada ispitanik namerno daje lažne informacije jer oseća otpor prema ispitivaču, kada ispitivač svojim tonom i stavom navodi ispitanika da daje određene odgovore ili bira pitanja koja navode odgovore u određenom smeru i drugo.

RASPORED ARITMETIČKIH SREDINA UZORAKA I NJIHOVE VARIJANSE

Osnovni skup sastoji se od svih elemenata posmatranja tako da se parametri koje računamo na osnovu njega konstante. Za osnovni skup može postojati samo jedna vrednost aritmetičke sredine, varijanse, standardne devijacije, koeficijenta varijacije i mera oblika rasporeda. S obzirom na to da se iz osnovnog skupa mogu izdvojiti brojni uzorci već pomenuti parametri, ukoliko se izračunavaju na nivou uzorka, predstavljaju slučajne promenljive. Izuzetak predstavlja slučaj kada računamo pomenute parametre za izabran uzorak veličine *n,* tada su izračunati parametri konstante.

Parametri uzorka odstupaju od parametara skupa iz kojeg je uzorak izvučen. Tako se i aritmetičke sredine uzoraka (m) razlikuju od uzorka do uzorka, ali i od aritmetičke sredine skupa ($\bar{x}$). Grupisanjem izračunatih aritmetičkih sredina po njihovoj vrednosti dobija se numerička serija koja se zove *raspored aritmetičkih sredina uzorka*. Zahvaljujući rasporedu aritmetičkih sredina uzoraka može se izračunati aritmetička sredina skupa. Aritmetička sredina osnovnog skupa odgovara aritmetičkoj sredini svih aritmetičkih sredina uzoraka. Raspored aritmetičkih sredina uzoraka se približava normalnom rasporedu sa porastom broja i veličine uzoraka.

Odstupanje aritmetičkih sredina uzorka od njihove zajedničke aritmetičke sredine meri se varijansom aritmetičkih sredina. Varijansa osnovnog skupa veća je od varijanse aritmetički sredina uzoraka koji su izvučeni iz tog skupa. U slučaju kada uzorak sadrži sve elemente osnovnog skupa vrednost varijanse uzorka je nula, a varijansa uzorka jednaka je varijansi osnovnog skupa kada je veličina uzorka jednaka jedinici.

OCENE NEPOZNATIH PARAMETARA OSNOVNOG SKUPA

Ocenjivanje aritmetičke sredine skupa kada je varijansa osnovnog skupa poznata

Ocenjivanje aritmetičke sredine osnovnog skupa ($\overline{x}$) vrši se na bazi uzorka *n* sa odgovarajućim rizikom greške ili stepenom pouzdanosti. Ocenjivanje se vrši na bazi intervala poverenja.

Interval poverenja za ocenu aritmetičke sredine kada je varijansa osnovnog skupa poznata izračunava se na sledeći način:

$$m - Z_{1-\alpha/2} * \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \overline{x} \leq m + Z_{1-\alpha/2} * \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

gde je $\overline{x}$ - aritmetička sredina skupa, m - aritmetička sredina uzorka, n - uzorak, σ - varijansa osnovnog skupa, $Z_{1-\alpha/2}$ - faktor pouzdanosti.

Vrednost $Z_{1-\alpha/2}$ nalazi se iz tablice normalnog rasporeda. Rizik da smo u zaključivanju napravili grešku predstavlja rizik greške i označava se sa α. Kod intervala poverenja od 0,95 rizik greške iznosi α=0,05. Obično se u praksi bira interval poverenja od 95% jer se tako dobija najviša pozdanost i relativna preciznost ocene istovremeno. Tada sa pouzdanošću od 95% tvrdimo da se aritmetička sredina skupa nalazi u navedenom intervalu, odnosno, postoji rizik od 5% da smo pogrešno zaključili.

Standardna greška ocene može se označiti i ovako:

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Standardna greška aritmetičkih sredina uzoraka bez ponavljanja manja je od standardne greške aritmetičkih sredina uzoraka izabranih iz beskonačnih skupova, pa se stoga dobija uži interval poverenja aritmetičke sredine osnovnog skupa.

Preciznost ocene meri se sledećim izrazom:

$$Z_{1-\alpha/2} * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Ukoliko se primenom ovog izraza dobije veća vrednost manja je preciznost ocene parametara osnovnog skupa na bazi uzorka.

Aritmetička sredina uzorka za negrupisane podatke dobija se iz sledećeg obrasca:

$$m = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{ili} \quad m = \frac{\sum x_i}{n}$$

gde je m – aritmetička sredina uzorka, x – posmatrano obeležje, a n - veličina uzorka.

Pomoću intervala poverenja možemo oceniti i *agregatne veličine*. Interval poverenja agregata je:

$$(m - Z_{1-\alpha/2} * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) * N \leq \sum_{i=1}^{N} xi \leq (m + Z_{1-\alpha/2} * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) * N.$$

gde je N - osnovni skup.

Ocenjivanje aritmetičke sredine skupa na bazi velikog uzorka kada je varijansa osnovnog skupa nepoznata

U praksi najčešće nisu poznate vrednosti varijanse i standardne devijacije osnovnog skupa. Razlozi za to su već pominjani u ranijem tekstu. Teže je vršiti analizu nad svim elementima osnovnog skupa s obzirom na to da skupovi mogu biti izuzetno veliki.

Ako se standardna greška ocene može izračunati ovako:

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

njena ocenjena vrednost je:

$$S_m = \frac{S_n}{\sqrt{n-1}},$$

gde je *Sn* – standardna devijacija uzorka koja se računa na sledeći način:

℘ za negrupisane podatke:

$$Sn = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - m)^2}{n}} \quad \text{ili} \quad Sn = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} x^2}{n} - m^2},$$

℘ za grupisane podatke:

$$Sn = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} f_i * (x_i - m)^2}{n}} \quad \text{ili} \quad Sn = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} f_* x^2}{n} - m^2}.$$

Kada je varijansa osnovnog skupa poznata koristi se sledeća statistika testa:

$$Z = \frac{m - \bar{x}_o}{\sigma/\sqrt{n}},$$

koja ima standardizovan normalan raspored N (0;1). Međutim, kada varijansa osnovnog skupa nije poznata, a uzorak je veći od 30 elementa (n≥30), konstruiše se nova statistika testa:

$$Z = \frac{m - \bar{x}_o}{S_n/\sqrt{n-1}}.$$

Interval poverenja za aritmetičku sredinu osnovnog skupa kada varijansa osnovnog skupa nije poznata je:

$$m - Z_{1-\alpha/2} * \frac{S_n}{\sqrt{n-1}} \leq \bar{x} \leq m + Z_{1-\alpha/2} * \frac{S_n}{\sqrt{n-1}},$$

gde je $\bar{x}$ - aritmetička sredina skupa, $Z_{1-\alpha/2}$ – faktor pouzdanosti koji se računa iz tablice Normalnog rasporeda, m – aritmetička sredina uzorka, a Sn – standardna greška aritmetičke sredine.

Ukoliko želimo da smanjimo grešku ocene, posebno kod vrlo raznovrsnih osnovnih skupova, primenjujemo analizu na osnovu *stratifikovanog uzorka*. Kod ovog uzorka varijansa je manja od varijanse kod prostog slučajnog uzorka, interval poverenja uži, a ocena na bazi njega preciznija. Na osnovu stratifikovanih uzoraka može se vršiti ocena pojedinih parametara iz svakog stratuma. Stratifikovani uzorak eliminiše varijabilnost između stratuma kao izvora veličine standardne greške.

Aritmetička sredina stratifikovanog uzorka predstavlja ponderisanu aritmetičku sredinu prostih slučajnih uzoraka. Veličina uzorka odgovara proporcionalno veličini stratuma iz kog je izvučen uzorak:

$r = \frac{n_i}{n} = \frac{N_i}{N}$, $r = \frac{n_i}{N}$ za i = 1, 2, 3, ..., s, gde je *s* broj stratuma.

Aritmetičku sredinu svakog stratuma izračunavamo na osnovu uzorka koji je izvučen iz tog stratuma na sledeći način:

$$m = \frac{n_1 m_1 + n_2 m_2 + \cdots + n_s m_s}{n},$$

gde je $n = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_s$ veličina stratifikovanog uzorka.

Standardna greška ocene je:

$$Sm = \sqrt{\sum_{i=1}^{s} \frac{n_i^2}{n^2} * \frac{S_i^2}{n_i - 1}} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{s} \frac{n_i}{(n_i - 1)} S_i^2}}{n}, \quad \frac{n_i}{(n_i - 1)},$$ pa je:

$$Sm = \sqrt{\sum_{i=1}^{s} \frac{n_i^2}{n^2} * \frac{S_i^2}{n_i - 1}} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{s} n_i S_i^2}}{n}.$$

Interval poverenja za aritmetičku sredinu osnovnog skupa na bazi stratifikovanog uzorka glasi ovako:

$$(m - Z_{1-\alpha/2} * Sm;\ m + Z_{1-\alpha/2} * Sm).$$

Ocenjivanje aritmetičke sredine skupa na bazi malog uzorka kada je varijansa osnovnog skupa nepoznata

Kada je varijansa osnovnog skupa poznata koristi se sledeća statistika testa:

$$Z = \frac{m - \bar{x}_o}{\sigma/\sqrt{n}},$$

koja ima standardizovan normalan raspored N (0;1). Međutim, kada varijansa osnovnog skupa nije poznata, a uzorak je manji od 30 elementa ($n<30$), konstruiše se nova statistika testa:

$$t_{n-1} = \frac{m - \bar{x}_o}{S_n/\sqrt{n-1}}.$$

Interval poverenja za aritmetičku sredinu osnovnog skupa kada varijansa osnovnog skupa nije poznata, a uzorak mali je:

$$m - t_{n-1;\alpha/2} * \frac{S_n}{\sqrt{n-1}} \leq \overline{x} \leq m + t_{n-1;\alpha/2} * \frac{S_n}{\sqrt{n-1}},$$

gde je $\overline{x}$ - aritmetička sredina skupa, $t_{n-1;\alpha/2}$ – faktor pouzdanosti koji se računa iz tablice Studentovog t rasporeda, m – aritmetička sredina uzorka, a Sn – standardna greška aritmetičke sredine.

Ocenjivanje proporcije skupa na osnovu uzorka

Parametar P predstavlja proporciju (procenat) elemenata u osnovnom skupu koji se izdvajaju po određenoj karakteristici. Da bi se ocenio nepoznati parametar P koristi se sledeća statistika testa:

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}.$$

Interval poverenja za ocenu proporcije osnovnog skupa kada je veliki uzorak je:

$$P - Z_{1-\alpha/2}Sp \leq p \leq P + Z_{1-\alpha/2}Sp,$$

gde je P – ocenjena vrednost na osnovu uzorka i Sp – ocenjena vrednost standardne greške proporcije.

Ocenjena vrednost na osnovu uzorka izračunava se na sledeći način:

$$P = \frac{f}{n},$$

gde je *f* broj elemenata uzorka koji se izdvajaju po određenoj karakteristici.

Ocenjena vrednost strandardne greške proporcije izračunava se na sledeći način:

$$Sp = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}.$$

Vrednost faktora pouzdanosti razlikuje se za velike i male uzorke. Za velike uzorke faktor pouzdanosti $Z_{1-\alpha/2}$ izračunava se na osnovu tablice Normalnog rasporeda, a za male uzorke $t_{n-1;\alpha/2}$ na osnovu tablice Studentovog t rasporeda. Poželjno je da se standardna greška ocene koriguje oduzimanjem 1 od n.

Kao što je bio slučaj kod ocene aritmetičke sredine, moguće je formirati interval poverenja za agregatnu velčinu na osnovu intervala poverenja za ocenu proporcije uzorka.

Kada je u pitanju prost slučajan stratifikovani uzorak, njegova veličina odgovara proporcionalno veličini stratuma iz kog je izvučen uzorak:

$$r = \frac{n_i}{N}$$, za i = 1, 2, 3, ..., s, gde je *s* broj stratuma.

$$\overline{\mathrm{p}} = \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2 + \cdots + n_s p_s}{n},$$

gde je *n* veličina uzorka.

Ocena standardne greške proporcije je:

$$\mathrm{S}_{\overline{\mathrm{p}}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{s} \frac{n_i^2}{n^2} * sp_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{s} \frac{n_i^2 p_i (1 - p_i)}{n^2 (n_i - 1)}}, \quad \frac{n_i}{n_i - 1}$$, pa je:

$$\mathrm{S}_{\overline{\mathrm{p}}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{s} \frac{n_i^2 p_i (1 - p_i)}{n}}.$$

Interval poverenja za ocenu proporcije skupa *p*, a na bazi stratifikovanog uzorka je:

$$\overline{\mathrm{P}} - Z_{1-\alpha/2} S_{\overline{\mathrm{p}}} \leq p \leq \overline{\mathrm{P}} + Z_{1-\alpha/2} S_{\overline{\mathrm{p}}}$$

Ocenjivanje varijanse osnovnog skupa na bazi uzorka

Na osnovu uzorka veličine *n* varijansu osnovnog skupa ocenjujemo statistikom testa koja glasi:

$$\chi^2_{n-1} = \frac{n * S_n^2}{\sigma^2},$$

koja ima χ^2 raspodelu sa (n – 1) stepeni slobode.

Ocena varijanse uzorka je:

- za negrupisane podatke:

$$Sn^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - m)^2}{n} \quad \text{ili} \quad Sn^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} x^2}{n} - m^2,$$

- za grupisane podatke:

$$Sn^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} f_i * (x_i - m)^2}{n} \quad \text{ili} \quad Sn^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} f_* x^2}{n} - m^2.$$

Kako varijansa uzorka Sn^2 nije nepristrasna ocena varijanse osnovnog skupa σ^2 uvodimo popravljenu varijasu uzorka koja predstavlja nepristrasnu ocenu varijanse osnovnog skupa:

$$S^2 = S_{n-1}^2 = \frac{n}{n-1} * S_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2}{n-1}.$$

Interval poverenja za ocenu varijanse osnovnog skupa na osnovu varijanse uzorka je:

$$nS_n^2/\chi_{n-1;\alpha/2}^2 \leq \sigma^2 \leq nS_n^2/\chi_{n-1;1-\alpha/2}^2.$$

TESTIRANJE (PROVERA) STATISTIČKE HIPOTEZE

Druga oblast statističkog zaključivanja, pored ocenjivanja nepoznatih parametara osnovnog skupa na bazi uzorka, je testiranje statističkih hipoteza. Naučni metod *testiranje statističkih hipoteza* primenjuje se za proveru ispravnosti unapred postavljene pretpostavke o vrednosti parametara osnovnog skupa.

Pored statističkih hipoteza o parametrima osnovnog skupa mogu se testirati i hipoteze o rasporedu osnovnog skupa. Statistički testovi koji se koriste prilikom testiranja mogu biti *parametarski* i *neparametarski*.

Dok se parametarskim statističkim testovima ispituje aritmetička sredina, neparametarskim statističkim testovima ispituje se medijana. Neparametarski testovi nalaze primenu u praksi zbog toga što veliki broj pojava nije kvantitativno merljiv već se može predstaviti u vidu rangova. Da bi se primenio neparametarski test osnovni skup iz kojeg uzimamo podatke mora imati neprekidan raspored.

Postupak testiranja postavljene hipoteze podrazumeva sledeće faze:

- formulisanje nulte i alternativne hipoteze;
- izbor veličine i tipa uzorka;
- izbor odgovarajuće statistike testa;
- izbor rizika greške α, odnosno, verovatnoće β;
- definisanje kriterijuma za prihvatanje/odbacivanje nulte nipoteze;
- izračunavenje vrednosti statistike testa;
- komparacija dobijene vrednosti sa kritičnim vrednostima iz statističke tablice;
- donošenje odluke o prihvatanju ili odbacivanju postavljene hipoteze.

Nulta hipoteza (Ho) predstavlja očekivanu vrednost određenog parametra osnovnog skupa. Ona sadrži tvrđenje o vrednosti nepoznatog parametra osnovnog skupa koje želimo da osporimo. U alternativnoj hipotezi (H_1) unosimo one vrednosti određenog parametra osnovnog skupa koje nisu obuhvaćene u nultoj hipotezi.

Prilikom postavljanja nulte i alternativne hipoteze neophodno je posebno obratiti pažnju da našu pretpostavku koju želimo da potvrdimo prikažemo u okviru alternativne hipoteze. To je neophodno jer za odbacivanje nulte hipoteze moramo imati veoma jake razloge od razloga za njeno prihvatanje. U tom slučaju ukoliko odbacimo nultu hipotezu onda je alernativna hipoteza sa velikom sigurnošću tačna. Međutim, tvrdnju da je nipoteza tačna ne treba prihvatiti sa velikom sigurnošću. To znači da nemamo dovoljno jake dokaze da osporimo tu tvrdnju i dok je tako tvrdnja će biti tačna. Dakle, alternativnu hipotezu automatski prihvatamo čim, na osnovu rezultata statistike testa, odbacimo nultu hipotezu.

Statistička hipoteza može biti prosta i složena. Hipoteze Ho i H_1 mogu biti postavljene na tri načina:

- Ho ($t = t_0$) protiv H_1 ($t \neq t_0$);
- Ho ($t \geq t_0$) protiv H_1 ($t > t_0$);
- Ho ($t \leq t_0$) protiv H_1 ($t > t_0$).

Prva kombinacija hipoteza predstavlja dvostrani test, dok je u preostala dva slučaja reč o jednostranom testu.

U procesu statističkog testiranja, a prilikom donošenja odluka na bazi rezultata statistike testa mogu se javiti *greška prve vrste* i *greška druge vrste*[53].

U slučaju kada se odbaci nulta hipoteza (Ho), a ona je u stvari tačna, onda smo načinili grešku prve vrste. Verovatnoća greške prvog tipa (α) naziva se *nivo (prag) značajnosti.*

$$\alpha = P\ (\text{Ho odbacujemo / Ho je tačna})$$

U slučaju kada prihvatimo nultu hipotezu (Ho), a stvarno je tačna hipoteza H_1 pravimo grešku druge vrste. Verovatnoća da se desi greška druge vrste naziva se *moć testa* i označava se sa β.

$$\beta = P\ (\text{Ho se prihvata / Ho je netačna})$$

Baza na osnovu koje se vrši testiranje hipoteza zove se *statistika uzorka*. *Statistika testa* predstavlja količnik razlike između ocene parametra i hipotetičke vrednosti u odnosu na standardnu grešku ocene:

$$\text{statistika testa} = \frac{\text{ocena parametra} - \text{hipotetička vrednost}}{\text{standardna greška ocene}}.$$

Testiranje hipoteze o vrednosti aritmetičke sredine skupa na bazi uzorka kada je varijansa osnovnog skupa poznata

Prilikom testiranja hipoteze o vrednosti aritmetičke sredine osnovnog skupa postoje ***tri pravila***.

Kada se testira hipoteza Ho ($\bar{x}=\bar{x}_o$) protiv alternativne hipoteze H_1 ($\bar{x}\neq\bar{x}_o$) uz verovatnoću 1-β i pretpostavku da skup ima normalan raspored ili da raspored osnovnog skupa nije poznat, a veličina uzorka je $n \geq 30$ i varijansa osnovnog skupa je poznata koristimo sledeću statistiku testa:

$$Z = \frac{m - \bar{x}_o}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}.$$

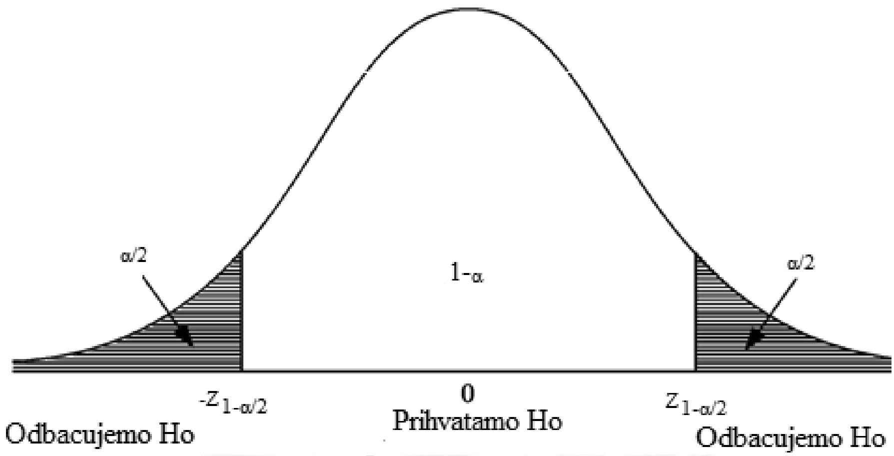
Ova statistika testa ima normalan raspored N(0,1) pod uslovom da je hipoteza Ho tačna. U pitanju je dvosmerni test.

Za dati nivo značajnosti α dobija se kritična vrednost $Z_{1-\alpha/2}$ iz tablice

[53]Petrović, Lj., 2015. *Teorijska statistika – Teorija statističkog zaključivanja*, Ekonomski fakultet u Beogradu, Beograd, str. 159.

Normalnog rasporeda, a kritična oblast je:

$$K = (-\infty;\ -Z_{1-\alpha/2}) \cup (Z_{1-\alpha/2};\ +\infty).$$



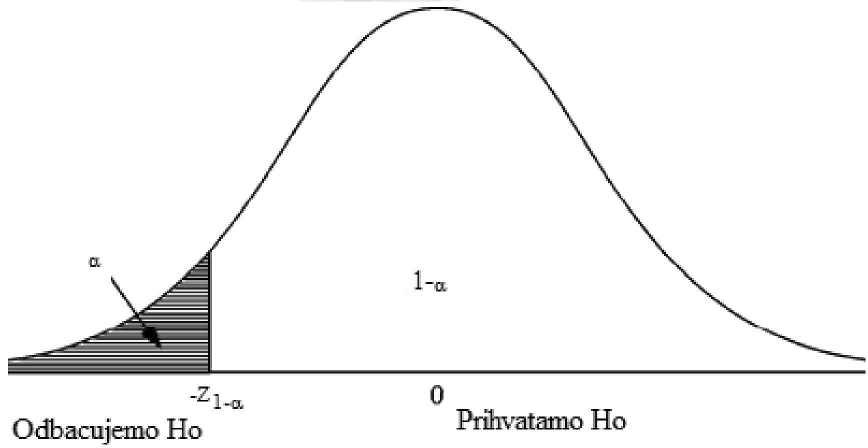
Kada se testira hipoteza Ho ($\bar{x} \geq \bar{x}_o$) protiv alternativne hipoteze H_1 ($\bar{x} < \bar{x}_o$) uz verovatnoću 1-β i pretpostavku da skup ima normalan raspored ili da raspored osnovnog skupa nije poznat, a veličina uzorka je $n \geq 30$ i varijansa osnovnog skupa je poznata koristimo sledeću statistiku testa:

$$Z = \frac{m - \bar{x}_o}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}.$$

Ova statistika testa ima normalan raspored N(0,1) pod uslovom da je hipoteza Ho tačna. U pitanju je jednosmeran test.

Za dati nivo značajnosti α dobija se kritična vrednost $Z_{1-\alpha}$ iz tablice Normalnog rasporeda, a kritična oblast je:

$$K = (-\infty;\ -Z_{1-\alpha}).$$



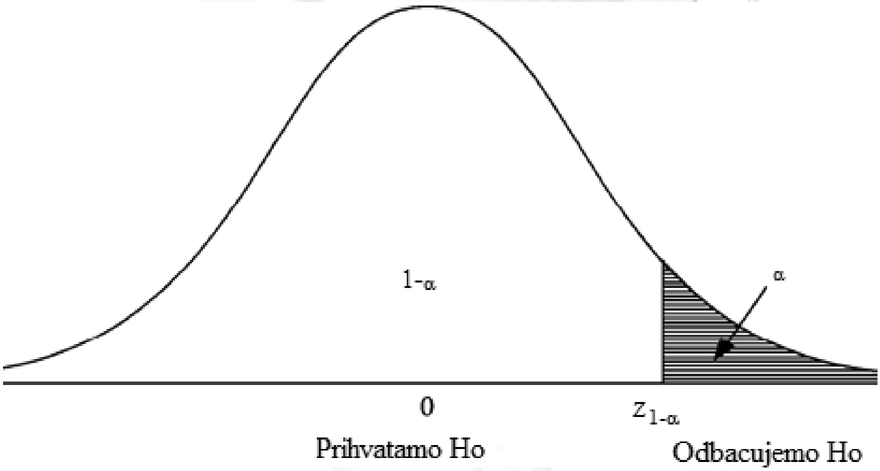
Kada se testira hipoteza Ho ($\bar{x} \leq \bar{x}_o$) protiv alternativne hipoteze H_1 ($\bar{x} > \bar{x}_o$) uz verovatnoću 1-β i pretpostavku da skup ima normalan raspored ili da raspored osnovnog skupa nije poznat, a veličina uzorka je $n \geq 30$ i varijansa osnovnog skupa je poznata koristimo sledeću statistiku testa:

$$Z = \frac{m - \bar{x}_o}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}.$$

Ova statistika testa ima normalan raspored N(0,1) pod uslovom da je hipoteza Ho tačna. U pitanju je jednosmeran test.

Za dati nivo značajnosti α dobija se kritična vrednost $Z_{1-\alpha}$ iz tablice Normalnog rasporeda, a kritična oblast je:

$$K = (Z_{1-\alpha}; +\infty).$$



Testiranje hipoteze o vrednosti aritmetičke sredine skupa na bazi uzorka kada je varijansa osnovnog skupa nepoznata

Statističku hipotezu o vrednosti aritmetičke sredine skupa možemo testirati i kada varijansa osnovnog skupa nije poznata, a uzorak veći od 30. U tom slučaju prethodna pravila se poštuju s tom razlikom što se primenjuje statistika testa koja se primenjuje i za testiranje aritmetičke sredine skupa kada varijansa skupa nije poznata, a uzorak mali. Kritične vrednosti se određuju na bazi tablice Normalnog rasporeda verovatnoće.

Kada se testira hipoteza Ho ($\bar{x} = \bar{x}_o$) protiv alternativne hipoteze H_1 ($\bar{x} \neq \bar{x}_o$) za dati nivo značajnosti α i pretpostavku da skup ima normalan raspored, ili da raspored osnovnog skupa simetričan, ili unomodalan, a veličina uzorka nije manja od 8 (n<8) i varijansa osnovnog skupa je poznata koristimo sledeću statistiku testa na bazi uzorka:

$$t_{n-1} = \frac{m - \bar{x}o}{\frac{Sn}{\sqrt{n-1}}}.$$

Ova statistika testa ima Studentov t raspored sa n-1 stepeni slobode i standardnom devijacijom uzorka (Sn) pod uslovom da je hipoteza Ho tačna. U pitanju je dvosmerni test.

Za dati nivo značajnosti α dobija se kritična vrednost $t_{n-1;\alpha/2}$ iz tablice Studentovog t rasporeda, a kritična oblast je:

$$K = (-\infty; -t_{n-1;\alpha/2}) \cup (t_{n-1;\alpha/2}; +\infty).$$

Na sličan način formiraju se preostala dva pravila. Oslanjamo se na primer kako postaviti pravila kada je varijansa skupa poznata, a uzorak mali, s tom razlikom što se koristi statistika testa zasnovana na Studentovom t rasporedu verovatnoće.

Testiranje hipoteze o proporciji osnovnog skupa na bazi uzorka

Kada se testira hipoteza Ho (p=po) protiv alternativne hipoteze H_1 (p≠po) za dati nivo značajnosti α i uslov n*po≥5, n(1-po)≥5 i n≥30 koristimo sledeću statistiku testa:

$$Z = \frac{p - po}{\sqrt{\frac{po(1-po)}{n}}}.$$

Ova statistika testa ima normalan raspored N(0,1) pod uslovom da je hipoteza Ho tačna. U pitanju je dvosmeran test.

Za dati nivo značajnosti α dobija se kritična vrednost $Z_{1-\alpha/2}$ iz tablice Normalnog rasporeda, a kritična oblast je:

$$K = (-\infty; -Z_{1-\alpha/2}) \cup (Z_{1-\alpha/2}; +\infty).$$

Kod ovog testa nultu hipotezu prihvatamo ukoliko je vrednost dobijena testiranjem između donje i gornje kritične granice.

Kada se testira hipoteza Ho (p≥po) protiv alternativne hipoteze H_1 (p<po)

uz verovatnoću 1-β i prethodno navedenim uslovima koristimo sledeću statistiku testa:

$$Z = \frac{p - po}{\sqrt{\frac{po(1 - po)}{n}}}.$$

Ova statistika testa ima normalan raspored N(0,1) pod uslovom da je hipoteza Ho tačna. U pitanju je jednosmeran test.

Za dati nivo značajnosti α dobija se kritična vrednost $Z_{1-\alpha}$ iz tablice Normalnog rasporeda, a kritična oblast je:

$$K = (-\infty; - Z_{1-\alpha}).$$

Kada se testira hipoteza Ho (p≤po) protiv alternativne hipoteze H_1 (p>po) uz verovatnoću 1-β i ispunjene prethodne uslove koristimo sledeću statistiku testa:

$$Z = \frac{p - po}{\sqrt{\frac{po(1 - po)}{n}}}.$$

Ova statistika testa ima normalan raspored N(0,1) pod uslovom da je hipoteza Ho tačna. U pitanju je jednosmeran test.

Za dati nivo značajnosti α dobija se kritična vrednost $Z_{1-\alpha}$ iz tablice Normalnog rasporeda, a kritična oblast je:

$$K = (Z_{1-\alpha}; +\infty).$$

Testiranje hipoteze o razlici aritmetičkih sredina dva osnovna skupa

U praksi je često potrebno izvršiti testiranje o razlici aritmetičkih sredina dva osnovna skupa. U tom slučaju poštuju se ista pravila kao i u prethodno navedenim testovima.

Kada se testira hipoteza Ho ($\bar{x}_1=\bar{x}_2$) protiv alternativne hipoteze H_1 ($\bar{x}_1\neq\bar{x}_2$) za dati nivo značajnosti α i kada su poznate varijanse skupa koristimo sledeću statistiku testa:

$$Z = \frac{(m_1 - m_2 - (\bar{x}_1 - \bar{x}_2))}{\sigma_{m_1 - m_2}}$$

Ova statistika testa ima normalan raspored N(0,1) pod uslovom da je hipoteza Ho tačna. U pitanju je dvosmeran test. Ukoliko dobijena vrednost testiranjem pripada kritičnoj oblasti nulta hipoteza se odbacuje. Testiranje se vrši na osnovu dva uzorka koji su izvučeni iz dva različita skupa. U slučaju kada se javi velika razlika zaključujemo da uzorci potiču iz dva skupa sa različitim aritmetičkim sredinama i nultu hipotezu odbacujemo.

Standardna greška za potrebe testiranja dobija se:

$$\sigma_{m_1-m_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}.$$

Za dati nivo značajnosti α izračunavamo kritičnu vrednost $Z_{1-\alpha/2}$ iz tablice Normalnog rasporeda, a kritična oblast je:

$$K = (-\infty; -Z_{1-\alpha/2})U(Z_{1-\alpha/2}; +\infty).$$

U slučaju kada vršimo testiranje razlika aritmetičkih sredina dva uzorka, a varijanse osnovnih skupova nisu poznate koristiće se varijanse uzoraka. Polazimo od pretpostavke da su osnovni skupovi normalno raspoređeni sa međusobno jednakim varijansama koje nisu poznate, dok su uzorci koje smo izvukli iz tih skupova proizvoljne veličine.

Kada se testira hipoteza Ho ($\bar{x}_1=\bar{x}_2$) protiv alternativne hipoteze H_1 ($\bar{x}_1\neq\bar{x}_2$) za dati nivo značajnosti α koristimo sledeću statistiku testa:

$$t_{n_1+n_2-2} = \frac{(m_1 - m_2 - (\bar{x}_1 - \bar{x}_2))}{\sigma_{m_1-m_2}}$$

Ova statistika testa ima Studentov t raspored sa n_1+n_2-2 stepeni slobode, pod uslovom da je hipoteza Ho tačna. U pitanju je dvosmeran test.

Ponderisana ocena varijanse osnovnog skupa je:

$$S^2 = \frac{n_1S_1^2 + n_2S_2^2}{n_1 + n_2 - 2},$$

dok je ocena standardne greške skupa:

$$S_{m_1-m_2} = S\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}.$$

Za dati nivo značajnosti α dobija se kritična vrednost $t_{n-1;\alpha/2}$ iz tablice Studentovog t rasporeda, a kritična oblast je:

$$K = (-\infty; -t_{n1+n2-2;\alpha/2})U(t_{n1+n2-2;\alpha/2}; +\infty).$$

Ukoliko dobijena vrednost testiranjem pripada kritičnoj oblasti nulta hipoteza se odbacuje, u protivnom se nulta hipoteza prihvata.

Testiranje hipoteze o razlici proporcija dva osnovna skupa

U praksi je često potrebno izvršiti testiranje o razlici proporcija dva osnovna skupa. U tom slučaju poštuju se ista pravila kao i u prethodno navedenim testovima.

Kada se testira hipoteza Ho ($p_1=p_2$) protiv alternativne hipoteze H_1 ($p_1 \neq p_2$) za dati nivo značajnosti α i uslov $n_i * p_i \geq 5$, $n_i(1-p_i) \geq 5$ za i=1, 2 i $n \geq 30$, a slučajni uzorci su međusobno nezavisni koristimo sledeću statistiku testa:

$$Z = \frac{(P_1 - P_2 - (p_1 - p_2))}{\sigma_{p_1-p_2}}.$$

Ova statistika testa ima normalan raspored N(0,1) pod uslovom da je hipoteza Ho tačna. U pitanju je dvosmeran test.

Ocenjena vrednost standardne greške računa se na sledeći način:

$$\sigma_{p_1-p_2} = \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}.$$

Za dati nivo značajnosti α dobija se kritična vrednost $Z_{1-\alpha/2}$ iz tablice Normalnog rasporeda, a kritična oblast je:

$$K = (-\infty; -Z_{1-\alpha/2}) U (Z_{1-\alpha/2}; +\infty).$$

Preostala dva pravila prilagoditi po ugledu na prethodna testiranja.

Pojam i oblici χ^2 testa

χ^2 test predstavlja neparametarski test saglasnosti koji se zasniva na primeni χ^2 rasporeda. Vrednost ovog testa je uvek pozitivna, a u pitanju su jednosmerni testovi. Najmanja vrednost koja se može dobiti prilikom testiranja primenom χ^2 testa je nula. Razlikujemo χ^2 test oblika rasporeda i χ^2 test nezavisnosti obeležja. Reč je o testu koji je jednostavan za primenu.

Za χ^2 je karakteristično svojstvo aditivnosti. Kako je aritmetička sredina rasporeda jednaka broju stepena slobode, a varijansa dvostrukom broju stepena slobode, sa porastom broja stepena slobode χ^2 raspored teži normalnom rasporedu.

Da bi χ^2 test bio pravilno primenjen neophodno je da budu ispunjeni određeni uslovi:

- testiranje primenom χ^2 testa može se vršiti samo za apsolutne frekvencije,
- ukupna vrednost teorijskih frekvencija mora biti jednaka ukupnoj vrednosti originalnih frekvencija.
- ukoliko se neka pojava testira pitanjima „da” i „ne, ili „ispravan” i „neispravan” i slično, broju frekvencija „da” moramo pridružiti i frekvencije „ne”,
- treba izbegavati male frekvencije. Kada se jave male očekivane frekvencije (manje od 5) one se pridružuju drugima ili se sabira više malih očekivanih frekvencija.

χ^2 test oblika rasporeda

U statističkoj analizi statistiku χ^2 oblika prvi je uveo Karl Pirson 1890. godine. Statistika testa za χ^2 test je:

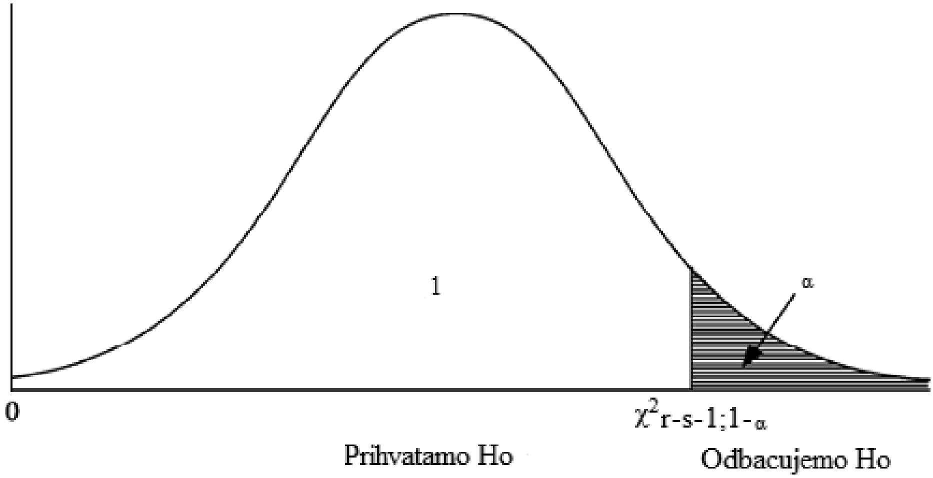
$$\chi^2_{r-s-1} = \sum_{i=1}^{K} \frac{(fi - fi')^2}{fi'},$$

gde su f_i – empirijske frekvence, f_i' – očekivane frekvence, r – broj modaliteta posmatrane slučajne veličine, a s – broj nepoznatih ocenjenih parametara na bazi uzorka.

Primenom χ^2 sa rizikom greške α testiramo nultu hipotezu (Ho) u kojoj pretpostavljamo da obeležje ima određenu raspodelu, protiv alternativne hipoteze (H_1) u kojoj pretpostavljamo da obeležje nema očekivanu raspodelu. Broj stepeni slobode je r-s-1. Test je jednosmeran i pozitivan.

Za dati nivo značajnosti α dobija se kritična vrednost $\chi^2_{r-s-1};\alpha$ iz tablice χ^2 rasporeda, a kritična oblast je:

$$K = (\chi^2_{r-s-1};\alpha;\ +\infty).$$



Iako smo pomenuli da je potrebno male očekivane frekvencije pregrupisati, neki autori sa tim nisu saglasni, posebno kada je reč o velikim uzorcima.

χ^2 test nezavisnosti obeležja

χ^2 test se može primenjivati za testiranje nezavisnosti između dva obeležja. Sa rizikom greške α u nultoj hipotezi definišemo pretpostavku da su obeležja jednog skupa *x* i *y* nezavisna, dok u alternativnoj hipotezi unosimo pretpostavku da su pomenuta dva obeležja zavisna. Obeležja x i y ne moraju biti kvantitativna. Realizovane vrednosti modaliteta x pojavljuju se kao $x_1, x_2,...,x_r$, a realizovane vrednosti modaliteta y kao $y_1, y_2,...,y_r$. Apsolutne frekvencije obeležavaju se sa f_{ij}. Očekivane frekvencije izračunavamo pomoću sledećeg obrasca:

$$f_{ij} = \frac{f_i * f_j}{n}.$$

Ovde se koristi sledeća statistika testa:

$$\chi^2_{(r-1)(s-1)} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{i=1}^{s}\frac{(f_{ij} - f'_{ij})^2}{f'_{ij}}.$$

Za dati nivo značajnosti α dobija se kritična vrednost $\chi^2_{(r-1)(s-1)};\alpha$ iz tablice χ^2 rasporeda, a kritična oblast je:

$$K = (\chi^2_{(r-1)(s-1)};\alpha; +\infty).$$

Analiziranjem rezultata do kojih smo došli u postupku testiranja donosimo odluku da li prihvatamo ili ne nultu hipotezu. Ukoliko odbacimo nultu hipotezu prihvatamo hipotezu da su posmatrana obeležja zavisna, a stepen nihove međuzavisnosti urvrđuje se pomoću *koeficijenta kontingencije.*

$$\chi^2_{(r-1)(s-1);\alpha} C = \sqrt{\frac{\chi^2_{(r-1)(s-1);\alpha}}{n + \chi^2_{(r-1)(s-1);\alpha}}}.$$

Vrednost ovog koeficijenta je pozitivna i kreće se u granicama od 0 do 1. Ako je koeficijent kontigencije jednak 1, međuzavisnost je potpuna. Najveća vrednost koeficijenta kontingencije je:

$C_{max} = \sqrt{\frac{r-1}{r}}$, kada je je r=s (isti broj modaliteta za x i y).

Ukoliko se povećava broj modaliteta obeležja koje posmatramo najveća vrednost koeficijenta kontingencije teži jedinici.

PITANJA ZA DISKUSIJU

- ✓ Šta je statističko zaključivanje i koje oblasti obuhvata?
- ✓ Objasnite ocenjivanje parametara osnovnog skupa.
- ✓ Objasnite testiranje parametara osnovnog skupa.
- ✓ Zašto je važna veličina uzorka u postupku statističkog zaključivanja?
- ✓ Na koji način se obezbeđuje reprezentativnost uzorka?
- ✓ Koje se statističke greške najčešće javljaju u praksi?
- ✓ Objasnite slučajne i neslučajne greške.
- ✓ Zbog čega se u postupku statističkog istraživanja javljaju moralni problemi?
- ✓ Objasnite odnos između aritmetičke sredine uzorka i aritmetičke sredine skupa.
- ✓ Objasnite odnos između varijanse uzorka i varijanse skupa.
- ✓ Kako se menja interval poverenja sa promenom koeficijenta poverenja?
- ✓ Kako veličina uzorka utiče na širinu intervala poverenja?
- ✓ Kako se ocenjuje agregat osnovnog skupa?
- ✓ Koja je prednost primene statističkog zaključivanja nad stratifikovanim uzorkom?
- ✓ Objasnite razliku između parametarskih i neparametarskih statističkih testova.
- ✓ Koji je postupak testiranja statističke hipoteze?
- ✓ Objasnite nultu i alternativnu hipotezu.
- ✓ Objasnite grešku prve vrste koja se javlja u postupku statističkog testiranja.
- ✓ Objasnite grešku druge vrste koja se javlja u postupku statističkog testiranja.
- ✓ Kojim informacijama moramo raspolagati da bismo adekvatno odabrali statistiku testa?
- ✓ Objasnite χ^2 test.
- ✓ Koji uslovi moraju biti ispunjeni da bi se primenio χ^2 test?
- ✓ Kako se koristi χ^2 test za testiranje oblika rasporeda?
- ✓ Šta se dešava kada se pojave male očekivane frekvencije?
- ✓ Kako se koristi χ^2 test za testiranje nezavisnosti obeležja?
- ✓ Prilikom primene χ^2 testa na koji način se utvrđuje postojanje međuzavisnoti posmatranih obeležja?
- ✓ Kako se određuje najveća vrednost koeficijenta kontingencije?

5.

ANALIZA REGRESIJE I ANALIZA KORELACIJE

-VEZE IZMEĐU POSMATRANIH POJAVA
-PROSTA LINEARNA REGRESIONA ANALIZA
Dijagram raspršenosti,
Prost linearni regresioni model
Metod najmanjih kvadrata
Standardna greška regresije i koeficijent determinacije
Ocenjivanje i predviđanje na bazi

-POJAM I ZNAČAJ KORELACIONE ANALIZE
Koeficijent proste linearne korelacije
Testiranje postojanja linearne korelacione veze
Korelacija ranga
Korelaciona veza između dve kategoričke varijable
Eksponencijalna i prosta parabolična regresija i korelacija drugog stepena
Višestruka regresija
Parcijalna i višestruka korelacija

PRIMENA REGRESIONE I KORELACIONE ANALIZE

Regresiona i korelaciona analiza se primenjuju s namerom da se opiše, predvidi i kontroliše zavisna promenljiva u odnosu na nezavisne promenljive, kao i da se utvrdi postojanje i intenzitet veze između zavisne i nezavisnih promenljivih.

Još 1885. godine Frensis Golton je prvi put upotrebio termin „regresija“ prilikom istraživanja naslednih osobina. Na osnovu njegovog istraživanja utvrđeno je da visina sinova pokazuje nazadovanje, odnosno regresiju, prema prosečnoj visini. Naime, očevi viši od proseka imaće sinove koji su viši od proseka, ali niži od njihovih očeva i obrnuto. Regresiona analiza ima široku primenu u praksi. Može pomoći u poboljšanju proizvodnog procesa, poboljšanju marketing strategije i slično.

Korelaciona analiza je u početku nalazila primenu u analizi bioloških problema. Kasnije je počela njena intenzivnija upotreba u poljoprivredi, ekonomiji, poslovanju u slično. Ova analiza je posebno korisna u poslovanju jer uz pomoć nje menadžeri mogu proceniti troškove, prodaju, cene i druge varijable na osnovu podataka o drugim posmatranim pojavama koje su blisko povezane sa njima. Na osnovu identifikovane jačine i prirode veze između dve posmatrane varijable možemo odrediti vrednost jedne varijable uz pomoć saznanja o vrednosti druge varijable.

Uz pomoć regresionog modela može se utvrditi odnos zavisnosti između posmatranih pojava kroz opisivanje prosečnog slaganja varijacija ispitivanih pojava. Da bi se ostvario ovaj *cilj regresije* neophodno je precizno definisati zavisnu i nezavisnu promenljivu. Regresioni model kroz sistem matematičkih formula i niza pretpostavki, na najkvalitetniji način opisuje kvantitativnu zavisnost između varijacija posmatranih pojava u stvarnosti.

Korelaciona analiza ispituje mogućnost postojanja kvantitativnog slaganja između varijacija posmatranih pojava, a ako slaganje postoji utvrđuje stepen tog slaganja. U zavisnosti od toga koliko se promenljivih varijabli posmatra veze između njih utvrđuju se uz pomoć metode proste (linearne i krivolinijske) regresione i korelacione analize ili metode višestruke (linearne i nelinearne) regresije i korelacije.

Kao jedan od nedostataka regresione i korelacione analize navodi se nemogućnost identifikovanja postojanja uzročno – posledične veze između zavisne i nezavisne promenljive u smislu da je jedna pojava uzrok, a druga posledica.

KARAKTER VEZA IZMEĐU POSMATRANIH POJAVA

Veza između pojava može biti deterministička i stohastička.

Deterministička veza (funkcionalna ili egzaktna veza) podrazumeva da jednoj vrednosti nezavisno promenljive x odgovara samo jedna vrednost zavisno promenljive y. Dakle, promenljiva y je egzaktno određena promenljivom x. Međutim, u većini slučajeva iz prakse veza između posmatranih promenljivih nije deterministička. Glavni razlog tome je taj što na zavisno promenljivu deluje istovremeno veći broj nezavisno promenljivih.

Za razliku od determinističkih veza, stohastičke veze su slabije izražene. Kod ove veze, jednoj vrednosti nezavisno promenljive odgovara više zavisno promenljivih. Kod stohastičke veze individualne vrednosti zavisno promenljive y znatno odstupaju od proseka. Da bi se utvrdie pravilnosti neophodno je ispitati veliki broj slučajeva.

S obzirom na to da na pojave u ekonomiji deluje veliki broj faktora i uticaji specifične, nepredvidive psihološke prirode, nismo u mogućnosti u potpunosti da predvidimo vrednosti zavisno promenljive na osnovu vrednosti nezavisno promenljive. Zbog toga se javljaju stohastičke veze.

Veze mogu biti *direktne ili inverzne*. Ukoliko vrednosti porasta (opadanja) nezavisne promenljive x, istovremeno odgovara porast (opadanje) zavisno promenljive y reč je o direktnim vezama. Ako porastu jedne promenljive odgovara opadanje druge radi se o inverznim vezama.

PROSTA LINEARNA REGRESIONA ANALIZA

Regresiona analiza je jedan od najvažnijih statističkih metoda koja se često koristi u ekonomiji i ostalim društvenim naukama. Prosta linearna regresija se koristi onda kada između dve posmatrane pojave postoji linearna (pravolinijska) povezanost. Ovim regresionim modelom opisuje se linearna međuzavisnost između dve promenljive.

Prosta linearna regresiona analiza se primenjuje kada se kretanju podataka može aproksimirati prava linija koja prolazi između parova podataka. U odnosu na trend ovaj metod se razlikuje po tome što su kod regresione analize date dve serije podataka, dok se kod trenda jedna serija podataka posmatra kroz vreme.

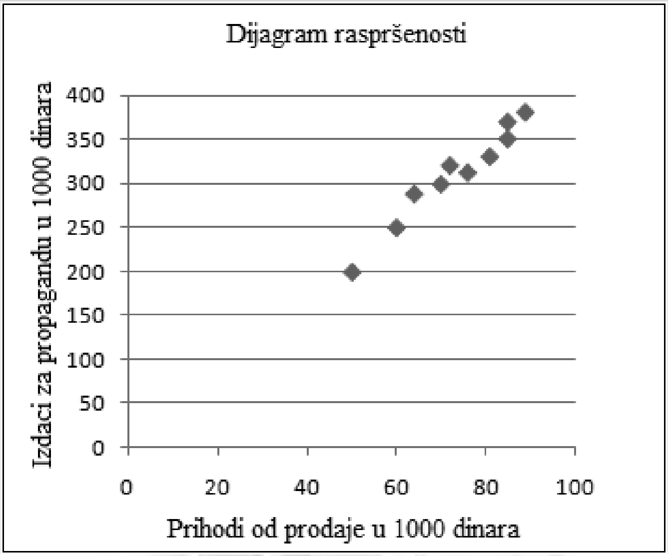
Dijagram raspršenosti

Dijagram raspršenosti predstavlja grafički prikaz posmatranih pojava na osnovu koga možemo uočiti oblik i smer kretanja posmatranih pojava, kao i njihove varijacije. Ovo je prvi korak prilikom analize zavisnosti između dve posmatrane pojave.

Tabela 15. Prihodi od prodaje u zavisnosti od izdataka za propagandu

Prodavnica	Izdaci za propagandu (u 000 dinara)	Prihodi od prodaje (u 000 dinara)
A	50	200
B	60	250
C	72	320
D	76	312
E	89	380
F	85	369
G	81	330
H	85	350
I	64	288
J	70	299

Grafikon 15. Dijagram raspršenosti podataka iz prethodne tabele



U pravouglom koordinatnom sistemu ucrtavamo presečne tačke parova nezavisne (x) i zavisne promenljive (y). Na osnovu ovakvog grafičkog prikaza moguće je uočiti da li između varijacija posmatranih pojava postoji kvantitativno slaganje. Takođe, može se oceniti koji je oblik kvantitativnog slaganja (linijski ili krivolinijski), kao i smer slaganja (direktni ili inverzni).

Prost linearni regresioni model

Funkcija prosle linearne regresije skupa izgleda ovako:

$$Yc = \beta o + \beta 1\ x + \varepsilon_{i,}$$

gde je yc – zavisna promenljiva, xi – nezavisna promenljiva, βo i β1 parametri regresije i ε_i – stohastički član ili slučajna greška.

S obzirom na to da na zavisnu promenljivu deluju i oni faktori koji nisu identifikovani u modelu, da stohastički podaci u uzorku sadrže greške u merenju kao i da su u ekonomskim relacijama prisutni slučajni faktori koji su inherentni ljudskom ponašanju prisustvo slučajne greške je opravdano.

Osnovna pretpostavka je da slučajna greška ima vrednost nula. Očekivanja su da slučajna greška ima male vrednosti jer neki faktori deluju u istom smeru dok drugi deluju u suprotnim smerovima.

Funkcija prosle linearne regresije uzorka izgleda ovako:

$$y_c = b_0 + b_1 x,$$

gde parametar b_0 pokazuje koliki je odsečak na y osi kada je vrednost promenljive x nula, a koeficijent b_1 pokazuje pravac nagiba, odnosno, za koliko će se promeniti zavisna promenljiva y kada se nezavisna promenljiva x poveća za jednu jedinicu.

Između varijacija posmatranih pojava ne postoji linearna veza ukoliko je vrednost koeficijenta b_1 nula.

Ukoliko je koeficijent b_1 veći od nula postoji direktno (rastuće) slaganje varijacija vrednosti zavisno i nezavisno promenljive. U suprotnom, kada je koeficijent b_1 manji od nula postoji inverzno (opadajuće) slaganje varijacija vrednosti zavisno i nezavisno promenljive.

Varijansa slučajne promenljive *e* izračunava se na sledeći način:

$$\sigma_e^2 = \frac{\Sigma(y - y`)^2}{N} \qquad \sigma_e = \sqrt{\frac{\Sigma(y - y`)^2}{N}}$$

gde je *y* – empirijska vrednost obeležja, *y'* – funkcija regresije.

Kondiciona varijansa se izračunava na sledeći način:

$$\sigma_{y`}^2 = \frac{\Sigma(y` - \bar{y})^2}{N}$$

Varijansa ukupnog varijabiliteta obeležja *y* se izračunava:

$$\sigma_y^2 = \frac{\Sigma(y - \bar{y})^2}{N}$$

$$\sigma_y^2 = \sigma_{y''} + \sigma_\epsilon^2$$

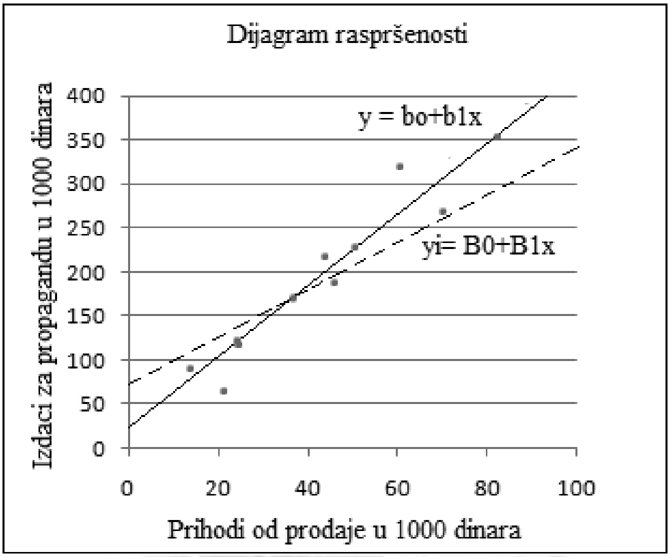
Procena koeficijenata metodom najmanjih kvadrata

Nakon formiranog dijagrama raspršenosti može se uočiti pravilnost u kretanju posmatranih pojava i odabrati tip krive koji najbolje reprezentuje date empirijske podatke. Primarni cilj je da se na osnovu uzorka najadekvatnije ocene koeficijenti b_0 i b_1 i postavi prava linija regresije:

$$y_c = b_0 + b_1 x.$$

Linije regresije u skupu i uzorku razlikuju se, jer se ocenjene vrednosti Bo i B1 razlikuju od stvarnih vrednosti parametara b_0 i b_1.

Grafikon 16. Linija regresije skupa i uzorka



Za određivanje nepoznatih koeficijenata b_0 i b_1 koristi se metod najmanjih kvadrata. Ovaj metod je zasnovan na minimiziranju kvadratnog odstupanja svih empirijskih tačaka od linije regresije.

$$\min \sum e_i^2 = \sum E_i^2, \quad B_0 \to b_0, \quad B_1 \to b_1, \quad E_i \to e_i$$

$$\min \sum e_i = \min \sum (y - B_0 - B_1 X)^2 = \sum E_i^2$$

$$B_0 n + B_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$B_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + B_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Rešavanjem ovih jednačina po B_0 i B_1 dobijamo:

$$B_1 = \frac{n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)}$$

$$B_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)}$$

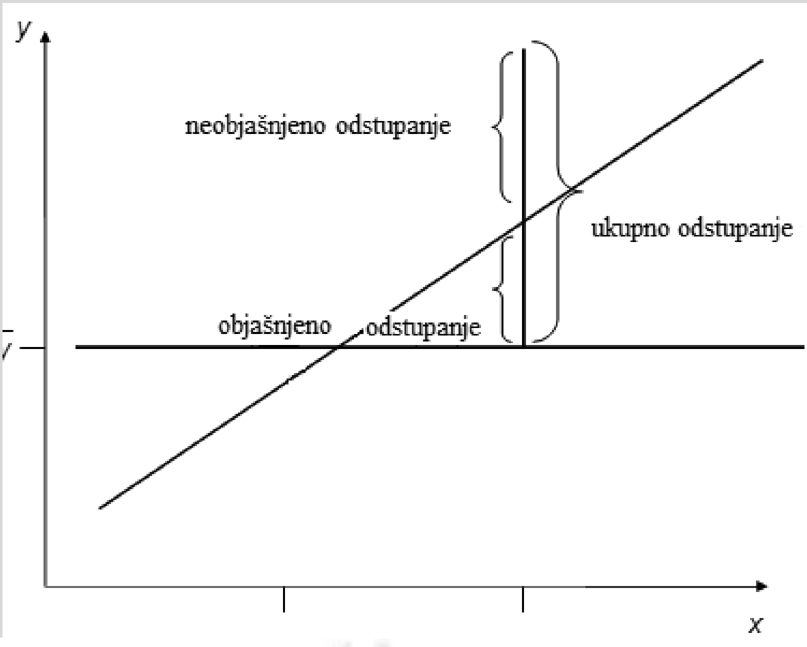
ili $B_0 = \bar{y} - B_1\bar{x}$.

Standardna greška regresije i koeficijent determinacije

Mere prilagođenosti linije regresije empirijskim podacima su standardna greška regresije i koeficijent determinacije. Standardna greška regresije predstavlja apsolutnu meru, dok je koeficijent determinacije relativna mera.

Ukupan varijabilitet zavisno promenljive posledica je delovanja regresionog modela, ali i slučajne greške ε_i.

Grafikon 17. Ukupan, objašnjen i neobjašnjen varijabilitet



Standardna greška regresije, kao apsolutna mera varijacija empirijskih podataka od linije regresije uzorka, izračunava se na sledeći način:

$$Se = \sqrt{\frac{\sum y^2 - Bo\sum y - B1\sum xy}{n-2}}.$$

Na osnovu dijagrama raspršenosti moguće je odrediti da li standardna greška regresija ima veću ili manju vrednost. Ukoliko su tačke na dijagramu više raspršene standardna greška regresije ima veću vrednost. U tom slučaju predviđanje na bazi takve linije regresije nije baš pouzdano. Na veličinu standardne greške regresije utiče veličina uzorka, ali i nivo vrednosti promenljive y. Standardna greška regresije nije podobna za ocenjivanje reprezentativnosti linija regresije u različitim modelima.

Koeficijent determinacije, kao relativna mera reprezentativnosti linije regresije, izračunava se na sledeći način:

$$R^2=B_1^2\frac{\sum x^2-n\overline{X}^2}{\sum y^2-n\overline{y}^2}.$$

On može uzimati vrednosti između 0 i 1. Kada je vrednost koeficijenta determinacije 1 ukupan varijabilitet je objašnjen i empirijske vrednosti se nalaze na liniji regresije. Linija regresije ne postoji kada je vrednost koeficijenta determinacije jednaka nuli. Kada je vrednost koeficijenta determinacije manja od 1 on pokazuje koliki je varijabilitet promenljive *y* uslovljen varijacijama promenljive *x*.

Uticaj neobjašnjivog varijabiliteta u ukupnom varijabilitetu određuje se koeficijentom interdeterminacije ($1-R^2$).

Ocenjivanje vrednosti zavisno promenljive na bazi regresionog modela

Ocenjivanje prosečne vrednosti zavisno promenljive na bazi regresionog modela uz rizik greške α vrši se uz pomoć intervala poverenja:

$$y_{cp} - t_{n-2;\alpha/2}\, S_{ysp} \leq E(yp) \leq y_{cp} + t_{n-2;\alpha/2}\, S_{ysp},$$

Za obračun intervala poverenja neophodno je izračunati standardnu grešku ocene prosečne vrednosti zavisno promenljive:

$$S_{ysp}=Se\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{(xp-\overline{X})^2}{\sum x^2-n\overline{X}^2}},$$

gde je:

S_{ysp} – standardna greška ocene prosečne vrednosti zavisne promenljive,

Xp – proizvoljna vrednost nezavisne promenljive, Se – standardna greška regresije.

Na standardnu grešku ocene prosečne vrednosti zavisno promenljive utiču mnogi faktori. Sa povećanjem standardne greške regresije ova greška se povećava. Međutim, kada je veći uzorak ova standardna greška se smanjuje. Takođe, ona se smanjuje sa povećanjem varijanse nezavisno promenljive *x*. Ukoliko je proizvoljna vrednost nezavisne promenljive daleko od prosečne vrednosti promenljive *x* povećava se standardna greška ocene prosečne vrednosti zavisne promenljive, a interval pouzdanosti se širi.

Predviđanje vrednosti zavisno promenljive na bazi regresionog modela

Predviđanje na bazi regresionog modela moguće je samo ukoliko su ispunjeni sledeći uslovi:

- linija regresije dobro reprezentuje empirijske podatke što potvrđuje visoka vrednost koeficijenta determinacije i
- da postoji linearna veza između posmatranih pojava, a to se vidi na osnovu vrednosti koeficijenta β_1 koji treba značajno da se razlikuje od nule.

Predviđanja individualne vrednosti zavisno promenljive *y* sa rizikom α vrši se uz pomoć intervala poverenja :

$$y_{cp} - z_{1-\alpha/2}\, S_{yp} \leq y_p \leq y_{cp} + z_{1-\alpha/2}\, S_{yp},$$

Kod predviđanja individualne vrednosti zavisno promenljive veća je neizvesnost nego kod ocenjivanja jer je u pitanju slučajna promenljiva. Zbog toga je i interval ocene širi.

Standardna greška predviđanja individualne vrednosti zavisno promenljive je veća od standardne greške ocene prosečne vrednosti zavisne promenljive jer stohastički član utiče na individualnu vrednost.

Standardna greška predviđanja individualne vrednosti zavisno promenljive izračunava se na sledeći način:

$$S_{yp}=Se\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(xp-\bar{X})^2}{\sum X^2-n\bar{X}^2}}.$$

POJAM I ZNAČAJ PRIMENE KORELACIONE ANALIZE

Često se u praksi nailazi na situaciju kada dve varijable koje posmatramo istovremeno rastu ili opadaju. Takođe, u nekim slučajevima jedna varijabla raste dok druga istovremeno opada. Posmatrajući neke ekonomske pojave kao što su ponuda i cene, ili tražnja i cene, možemo uočiti prethodno navedeno.

Ukoliko želimo da identifikujemo postojanje veze između dve posmatrane varijable koristimo ***korelacionu analizu***. Ova analiza se sprovodi kroz tri koraka:[54]

- Nastojimo da utvrdimo da li su dve varijable međusobno zavisne ili nezavisne;
- Ukoliko identifikujemo postojanje veze između dve varijable u narednom koraku pokušavamo da utvrdimo kakva je priroda te veze (pozitivna ili negativna korelaciona veza) i njenu jačinu;
- Sledeće što možemo utvrditi jeste da li postoji uzročno - posledična veza između posmatranih pojava, odnosno, da li varijacije jedne varijable izazivaju varijacije druge varijable.

U nekim situacijama koeficijent korelacije može ukazivati na postojanje veze između posmatranih varijabli, a da ta veza, u stvari, ne postoji. To se može desiti kod veoma malih uzoraka, ili u situaciji kada su obe posmatrane varijable pod uticajem neke treće varijable.

Korelacija između dve posmatrane varijable može biti:[55]

- Pozitivna i negativna;
- Linearna i nelinearna (krivolinijska);
- Prosta, parcijalna i višestruka.

Ukoliko posmatramo dve varijable, X i Y, između njih je moguće identifikovati sledeće vrste veza:[56]

[54] Bary, G. C. 2010. *Business statistics, 3rd Edition,* Tata McGraw-Hill Education, New Delhi, pp. 482.
[55] Bary, G. C. 2010. *Business statistics, 3rd Edition,* Tata McGraw-Hill Education, New Delhi, pp. 483.
[56] Barrow, M., 2006. *Statistics for Economics, Accounting and Business Studies*, 4th *Edition*, Prentice Hall, England, pp.224.

- Visoke vrednosti varijable X povezane su sa niskim vrednostima varijable Y i obrnuto što ukazuje na postojanje negativne korelacione veze.
- Visoke vrednosti varijable X povezane su sa visokim vrednostima varijable Y i obrnuto što ukazuje na postojanje pozitivne korelacione veze.
- Visoke (niske) vrednosti varijable X jednako su povezane sa visokim (niskim) vrednostima varijable Y i tada ne postoji korelacija između posmatranih varijabli.

Koeficijent proste linearne korelacije

Koeficijent linearne korelacije predstavlja meru jačine linearne veze između dve varijable, X i Y.[57] Cilj korelacione analize je identifikovanje postojanja linearnog kvantitativnog slaganja između dve posmatrane pojave, kao i utvrđivanje stepena i smera te veze. Koeficijent korelacije u statistiku je uveo Pirson. Pirsonov koeficijent linearne korelacije je relativna mera korelacije i definiše se kao količnik kovarijanse i proizvoda standardnih devijacija posmatranih obeležja.

Pirsonov koeficijent linearne korelacije može biti određen na osnovu skupa i na osnovu uzorka.

Ukoliko su dva obeležja osnovnog skupa (N) X i Y, definisaćemo Pirsonov koeficijent linearne korelacije na sledeći način:

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y},$$

gde je:

σ_{xy} – kovarijansa, σ_x^2 – varijansa i σ_y^2 – varijansa.

$$\sigma_{xy} = \frac{\Sigma\left(X-\overline{X}_x\right)(Y-\overline{X}_y)}{N},\ \sigma_x^2 = \frac{\Sigma(X-\overline{X}_x)^2}{N},\ \sigma_y^2 = \frac{\Sigma(Y-\overline{X}_y)^2}{N}.$$

Zamenom vrednosti za varijanse i kovarijansu u početnu jednačinu dobijamo sledeću jednačinu za izračunavanje koeficijenta korelacije skupa:

---

[57] Anderson, D., Sweeney, D., Williams, T., Freeman, J., Shoesmith, E., 2010. *Statistics for business and economics*, 2nd Edition, South-Western Cengage Learning, USA, pp. 579.

$$r = \frac{N\sum XY - \sum X \sum Y}{\sqrt{N\sum X^2 - (\sum X)^2}\sqrt{N\sum Y^2 - (\sum Y)^2}}.$$

Ukoliko su dva obeležja uzorka (n) X i Y, definisaćemo Pirsonov koeficijent linearne korelacije na sledeći način:

$$R = \frac{Sxy}{Sx * Sy},$$

gde je:

S_{xy} – kovarijansa, S_x – standardna devijacija i S_y – standardna devijacija.

$$S_{xy} = \frac{\Sigma(X - \overline{X})(Y - \overline{Y})}{n-1}, \quad S_x = \sqrt{\frac{\Sigma(X - \overline{X})^2}{n-1}}, \quad S_y = \sqrt{\frac{\Sigma(Y - \overline{Y})^2}{n-1}}.$$

Zamenom vrednosti za standardne devijacije i kovarijansu u početnu jednačinu dobijamo sledeću jednačinu za izračunavanje koeficijenta korelacije na bazi uzorka:

$$R = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{\sqrt{n\sum x^2 - (\sum x)^2}\sqrt{n\sum y^2 - (\sum y)^2}}.$$

Kao karakteristike korelacione analize izdvajaju se:

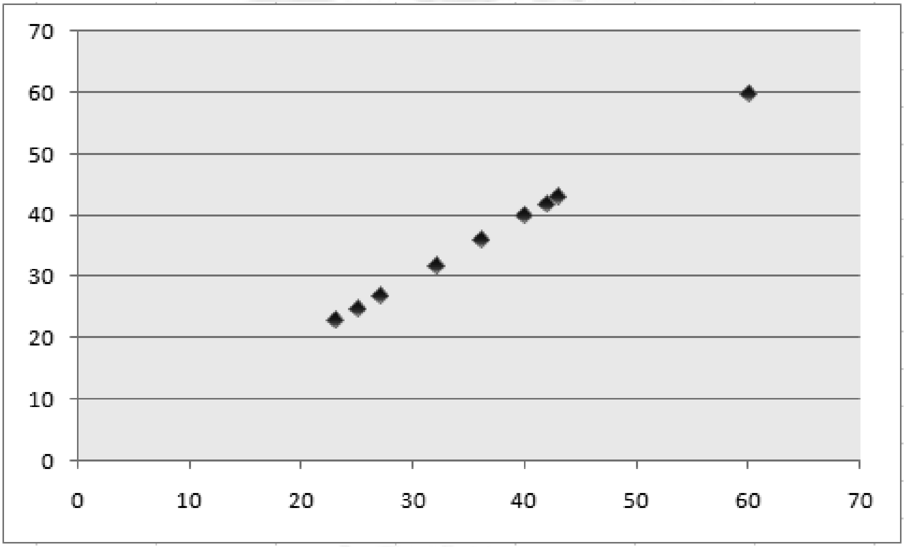
- Koeficijent korelacije se uvek nalazi između -1 i 1;
- Nije bitno definisati zavisnu i nezavisnu veličinu jer je isti rezultat za r_x i r_y;
- Rezultat veći od 0 ukazuje na postojanje pozitivne korelacije. Ukoliko je vrednost koeficijenta korelacije bliža 1 jača je veza između posmatranih pojava, pa su posmatranja bliža pravoj liniji;
- Koeficijent korelacije jednak 1 ukazuje na postojanje savršene veze između posmatranih pojava i sva zapažanja leže na liniji sa pozitivnim nagibom;
- Rezultat manji od 0 ukazuje na postojanje negativne korelacije. Ukoliko je vrednost koeficijenta korelacije bliža -1 jača je negativna veza između posmatranih pojava, pa su posmatranja bliža pravoj liniji;
- Ukoliko je vrednost koeficijenta korelacije jednaka 0 to znači da korelaciona veza između posmatranih pojava ne postoji.

Tabela Značenje dobijenih rezultata na osnovu koeficijenta korelacije

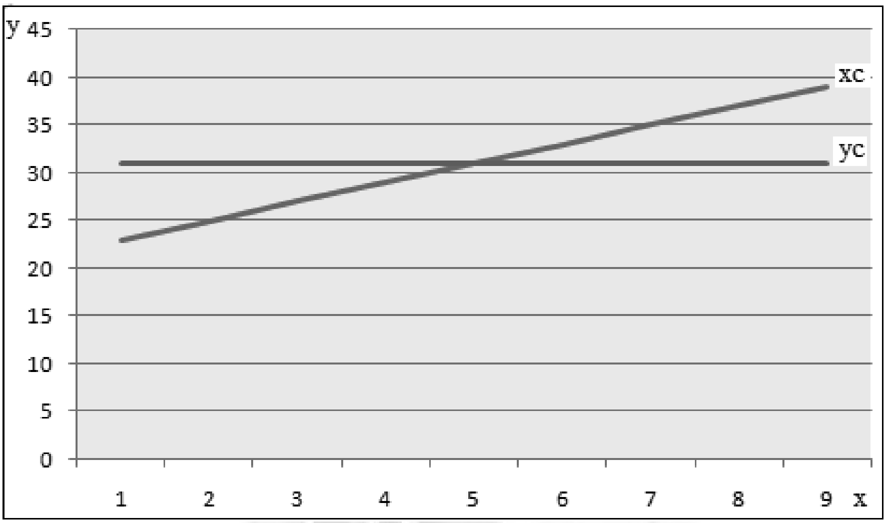
Vrednost za r	Značenje
0 < r < 0,2	Niska direktna korelacija
0,2 < r < 0,5	Neznatna direktna korelacija
0,5 < r < 0,7	Znatna direktna korelacija
0,7 < r < 0,9	Visoka direktna korelacija
0,9 < r < 1	Vrlo visoka direktna korelacija

Napomena: Ukoliko je predznak ispred dobijenog koeficijenta korelacije negativan (-), u pitanju je inverzna korelaciona veza.

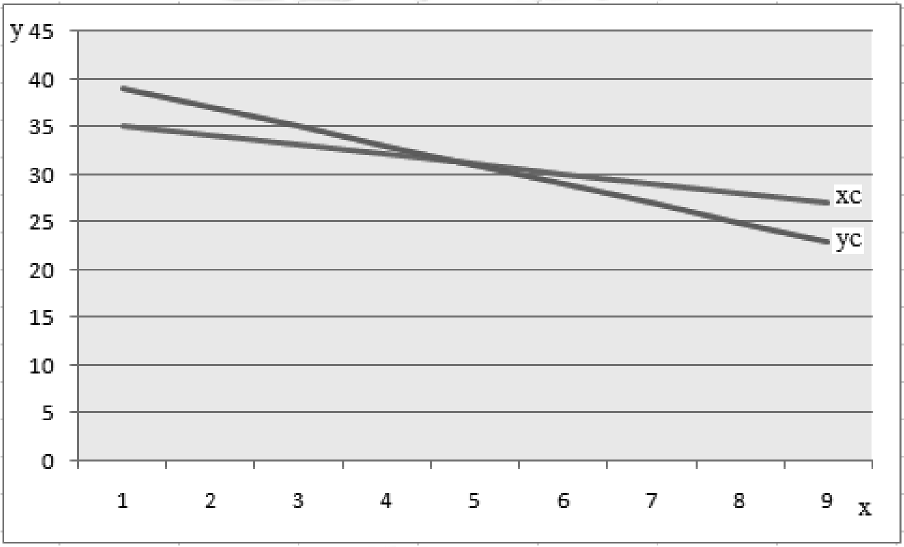
Grafik 18. Savršena korelaciona veza između posmatranih pojava (r = 1)



Grafik 19. Pozitivna (direktna) korelaciona veza između posmatranih pojava (r > 0)



Grafik 20. Negativna (inverzna) korelaciona veza između posmatranih pojava (r > 0)



Ukoliko smo već izračunali regresionu pravu i koeficijent determinacije onda koeficijent korelacije možemo izračunati na sledeći način:

$$r = (znak\ uz\ koeficijent\ b_1)\sqrt{Koeficijent\ determinacije}$$

$$r = (znak\ uz\ koeficijent\ b_1)\sqrt{r^2}$$

Testiranje postojanja linearne korelacione veze između slučajnih veličina X i Y osnovnog skupa

Ukoliko pođemo od pretpostavke da dve slučajne promenljive X i Y imaju normalan raspored možemo testirati hipotezu o postojanju linearne korelacione veze između dve varijable X i Y. Prilikom testiranja oslanjamo se na *t* test sa *n - 2* stepeni slobode.

U prvom koraku postavimo nultu i alternativnu hipotezu. U nultoj hipotezi polazimo od pretpostavke da ne postoji korelaciona veza između posmatranih pojava. U alternativnoj hipotezi polazimo od pretpostavke za između pojava postoji neka korelaciona veza.

$$Ho : \rho = 0$$

$$H_1 : \rho \neq 0$$

gde je Ho nulta hipoteza, H_1 alternativna hipoteza, a ρ koeficijent korelacije skupa.

Statistika testa glasi:

$$t = \frac{r - \rho}{\sqrt{(1 - r^2)/(n - 2)}}.$$

Standardna greška ocene proste linearne korelacije izračunava se na sledeći način:

$$Sr = \sqrt{\frac{(1 - r^2)}{(n - 2)}}.$$

Kod ovog testa nultu hipotezu odbacujemo uz rizik greške α ukoliko je dobijena vrednost statistike testa u okviru definisane kritične oblasti:

$$K = (-\infty, -t_{n-2;\alpha/2}) \cup (t_{n-2;\alpha/2}, +\infty).$$

Prosta linearna korelaciona analiza zasnovana na rangiranim podacima

Često se susrećemo sa statističkim serijama podataka koje su poređane po veličini. Obično su u pitanju pojave koje je teško numerički iskazati jer zavise od više faktora. U ovom slučaju za utvrđivanje postojanje korelacione veze između posmatranih pojava koristimo Spearmanov koeficijent korelacije. Kod ove analize mogu se javiti dve situacije:

- Kada su podaci već rangirani i
- Kada podaci nisu rangirani, pa je potrebno da to sami uradimo.

Kada sami rangiramo podatke 1 požemo posmatrati kao najveću ili kao najmanju vrednost. Neophodno je da koristimo isti princip rangiranja kod svih posmatranih varijabli. Ukoliko se pojave dve jednake vrednosti njima treba dodeliti prosečnu vrednost dva uzastopna mesta koja bi zauzele prilikom rangiranja da nemaju istu vrednost. Na primer, imamo dve podatka jedne varijable koji imaju vrednost 5. Prilikom rangiranja njima ćemo dati vrednost 5,5 ((5+6)/2=5,5) jer ovi podaci dele 5 i 6 mesto.

Da bismo izvršili proveru da li smo dobro rangirali podatke, odnosno, da nismo napravili grešku i neki rang preskočili ili ga upisali više puta, možemo primeniti sledeću formulu:[58]

$$\sum_{i=1}^{n} R^{I} = \frac{n*(n+1)}{2},$$

gde $\sum_{i=1}^{n} R^{I}$ predstavlja zbir rangova svakog posmatranog obeležja.

Nakon rangiranih podataka potrebno je odrediti razlike između parova rangova $(R_x – R_y) = d$. Za izračunavanje koeficijenta korelacije ranga neophodan je zbir kvadrata razlika između rangova (Σd^2) koji se zamenjuje u formuli:

$$r_s = 1 - \frac{6 * \sum d^2}{N * (N^2 - 1)},$$

gde je r_s Spearmanov koeficijent korelacije zasnovan na rangiranim podacima.

Vrednost Spearmanovog koeficijenta kreće se između -1 i 1. Ukoliko je vrednost koeficijenta veća od 0 monotona veza između dve pojave je rastuća.

[58] Stojković, M., 1995. Statistika za menadžere, Ekonomski fakultet u Subotici, Subotica, str. 615.

Kada koeficijent ima vrednost manju od 0 monotona veza između dve pojave je opadajuća. Veza između posmatranih pojava je jača ukoliko je vrednost koeficijenta bliži jedinici.

Ispitivanje postojanja korelacione veze između dve kategoričke varijable

Ispitivanje postojanja korelacione veze između dve kategoričke varijable za tabele veličine 2x2 vršimo pomoću Φ koeficijenta korelacije. Za veće tabele koristimo C koeficijent kontingencije.

Φ koeficijent korelacije izračunava se primenom sledeće formule:[59]

$$\Phi = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}}.$$

U tabeli 2x2 a, b, c i d predstavljaju odgovarajuća polja tabele.

C koeficijent korelacije izračunava se primenom sledeće formule:[60]

$$C = \sqrt{\frac{S-N}{S}} \quad \text{gde je} \quad S = \sum \frac{f_o^2}{f_e}.$$

Očekivane frekvencije su označene sa *fe*, dok su opažene frekvencije označene sa *fo*. Očekivane frekvencije je potrebno odrediti na sledeći način:

$$f_e = \frac{K * R}{N},$$

gde je K - zbir kolone, R - zbir reda, a N - veličina uzorka.

Ukoliko posmatramo sledeću tabelu gde su dati podaci o preferencijama različitih vrsta čokolada od strane muškaraca i žene ispitaćemo kolika je povezanost između pola i izbora čokolade.

Čokolada	Sa keksom	Sa lešnicima	Σ
Žene	35 (a)	22 (b)	57
Muškarci	20 (c)	38 (d)	58
Σ	55	60	115

[59] Turjačanin, V., Čekrlija, Đ., 2006. *Osnovne statističke metode i tehnike u SPSS-u*, Centar za kulturni i socijalni popravak, Banja Luka, str. 129.

[60] Turjačanin, V., Čekrlija, Đ., 2006. *Osnovne statističke metode i tehnike u SPSS-u*, Centar za kulturni i socijalni popravak, Banja Luka, str. 130.

$$\Phi = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}} = \frac{35*38 - 22*20}{\sqrt{(35+22)(35+20)(22+38)(20+38)}}$$

$$\Phi = \frac{1330 - 440}{\sqrt{10909800}} = \frac{890}{3302{,}99} = 0{,}27$$

Vrednost ovih koeficijenata može biti određena i uz pomoć vrednosti χ^2 testa na sledeći način:

$$\Phi = \sqrt{\frac{\chi^2}{N}} \quad \text{i} \quad C = \sqrt{\frac{\chi^2}{N + \chi^2}}.$$

PROSTA KRIVOLINIJSKA (PARABOLIČNA) REGRESIJA I KORELACIJA DRUGOG STEPENA

Za razliku od linearne međuzavisnoti gde postoji tendencija jednakog prirasta vrednosti zavisno promenljive u odnosu na nezavisnu promenljivu, kod nelinearne međuzavisnosti nije prisutan jednak prirast.

Da bismo ispitali da li između pojava postoji parabolična drugostepena veza unosimo podatke u dijagram rasturanja. Takođe, možemo primeniti i metod minimalne rezidualne greške.

Ukoliko posmatramo osnovni skup veličine N, gde je x nezavisno promenljiva, a y zavisno promenljiva funkcija kvadratne parabolične regresije ima sledeći oblik:

$$y' = F(x) = b_0 + b_1x - b_2x^2.$$

U ovoj formuli isključena je slučajna promenljiva ε_i.

Parametar b_0 pokazuje odsečak na y osi kada je vrednost nezavisno promenljive x jednaka nuli. Vrednost ovog parametra se teško tumači i obično nema neko ekonomsko značenje.

Parametar b_1 određuje u kom će se kvadrantu naći parabola, kod parametar b_2 pokazuje kakav je otvor parabole. Ukoliko je vrednost parametra b_2 manja od nula kvadratna parabola je okrenuta na dole. Kada je vrednost parametra b_2 veća od nule kvadratna parabola je okrenuta na gore.

Kvadratna parabola će najbolje reprezentovati podatke ukoliko ispunjava sledeći uslov:

$$\Sigma(y - F(x))^2 = \Sigma(y- b_0 + b_1x - b_2x^2)^2 = \min.$$

Izjednačavanjem parcijalnih izvoda po b_0, b_1 i b_2 dobija se sledeći sistem normalnih jednačina:

$$b_0 N + b_1\Sigma x + b_2\Sigma x^2 = \Sigma y$$

$$b_0 \Sigma x + b_1\Sigma x^2 + b_2\Sigma x^3 = \Sigma xy$$

$$b_0 \Sigma x^2 + b_1\Sigma x^3 + b_2\Sigma x^4 = \Sigma x^2 y$$

čijim rešavanjem dobijamo vrednosti parametra b_0, b_1 i b_2.

Standardna greška kvadratne parabolične regresije pokazuje prosečno odstupanje originalnih podataka zavisno promenljive od linije regresije i izračunava se na sledeći način:

$$S_e = \sqrt{\frac{\Sigma(y - yc)^2}{n-3}}$$

gde je n – veličina uzorka, 3 – broj ocenjenih parametara regresionog modela.

Koeficijent determinacije se izračunava preko obrasca:

$$r_y^2 = 1 - \frac{\sigma_{yc}^2}{\sigma_y^2}.$$

Koeficijent korelacije (indeks korelacije) može se izračunatu ukoliko prethodni obrazac stavimo pod korenom:

$$r_y = \sqrt{1 - \frac{\sigma_{yc}^2}{\sigma_y^2}}.$$

Vrednost rezidualne varijanse dobija se na sledeći način:

$$\sigma_{yc} = \sqrt{\frac{\Sigma(y - b_0 - b_1 x - b_2 x^2)^2}{N}} = \sqrt{\frac{\Sigma y^2 - b_0\Sigma y - b_1 \Sigma yx - b_2 \Sigma yx^2}{N}}.$$

Indeks korelacije može uzeti vrednost između nule i jedinice. On je uvek pozitivna veličina i ako se računa za regresionu pravu, pripada mu predznak parametra b_1.

PROSTA EKSPONENCIJALNA REGRESIJA I KORELACIJA

Ukoliko je x nezavisno promenljiva koja može uzimati fiksne vrednosti, a y zavisno promenljiva *funkcija proste eksponencijalne regresije* ima sledeći oblik:

$$y' = b_0 \, x^{b1}$$

gde je $b_0 > 0$ i $b_1 > 0$. U ovoj formuli isključena je slučajna promenljiva ε_i.

Ova funkcija može biti iskazana i u logaritamskom obliku na sledeću način:

$$\log y' = \log b_0 + b_1 \log x$$

Parametar b_0 pokazuje odsečak na y osi kada je vrednost nezavisno promenljive x jednaka nuli. Vrednost ovog parametra se teško tumači i obično nema neko ekonomsko značenje.

Parametar b_1 pokazuje procentualnu promenu vrednosti zavisne promenljive ukoliko se vrednost nezavisno promenljive poveća za 1%. Kada je vrednost parametra b_1 veća od nule pri povećanju nezavisne promenljive za 1% zavisna promenljiva će se povećati za vrednost parametra b_1 i obrnuto.

Funkcija proste eksponencijalne regresije će najbolje reprezentovati podatke ukoliko ispunjava sledeće uslove:

$$\Sigma(y - y') = 0 \quad \text{i} \quad \Sigma(\log y - \log y')^2 = \min.$$

Izjednačavanjem parcijalnih izvoda po b_0 i b_1 dobija se sledeći sistem normalnih jednačina:

$$\Sigma \log y = n \log b_0 + b_1 \Sigma \log x$$

$$\Sigma \log y \log x = \log b_0 \Sigma \log x + b_1 \Sigma(\log x)^2$$

čijim rešavanjem dobijamo vrednosti parametra b_0 i b_1.

Standardna greška funkcije proste eksponencijalne regresije pokazuje prosečno odstupanje originalnih podataka zavisno promenljive od linije regresije i izračunava se na sledeći način:

$$S_e = \sqrt{\frac{\Sigma(y - y')^2}{n - 2}}$$

gde je n – veličina uzorka, 2 – broj ocenjenih parametara regresionog modela. U slučaju kada se standardna greška izračunava za osnovni skup onda se u deliocu ispod korena umesto n-2 uzima vrednost N.

Koeficijent determinacije se izračunava preko istog obrasca kao kvadratni parabolični koeficijent determinacije, dok se koeficijent korelacije (indeks korelacije) može izračunatu ukoliko taj obrazac stavimo pod korenom:

LINEARNA VIŠESTRUKA REGRESIONA I KORELACIONA ANALIZA

Pojave koje su predmet statističkog posmatranja mogu biti promenljive u zavisnosti od dejstva mnogih faktora. Regresionom analizom nastojimo otkriti što više faktora koji deluju na jednu pojavu. Ukoliko se prilikom ispitivanja zavisnosti između dve pojave javi visok procenat neobjašnjivog varijabiliteta neophodno je u analizu uključiti još neku promenljivu. Posebno je značajno pažljivo odabrati koje će promenljive biti uključene u regresioni model.

Višestrukom regresionom analizom ispituje se postojanje zavisnosti jedne pojave od dve ili više pojava. Sve pretpostavke koje važe za prost linearni regresioni model važe i ovde kao i sledeće:

- ℘ Veličina uzorka mora biti veća od broja nepoznatih parametara koji se ocenjuju.
- ℘ Savršena korelacija ne postoji između nezavisno promenljivih.

Ukoliko su x_1, x_2, ... x_m nezavisno promenljiva koje mogu uzimati fiksne vrednosti, a y zavisno promenljiva, pri čemu je $m \leq n$, *funkcija višestruke linearne regresije* ima sledeći oblik:

Opšti model višestruke regresije osnovnog skupa je:

$$y = f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n).$$

U ovoj formuli isključena je slučajna promenljiva ε_i.

Kada regresioni model sadrži dve nezavisne promenljive x_1 i x_2 njegov oblik izgleda ovako:

$$y = f(x_1, x_2).$$

Funkcija linearne trodimenzionalne višestruke regresije je:

$$y' = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2.$$

U ovoj formuli isključena je slučajna promenljiva ε_i koja predstavlja stohastički deo. Deterministički deo modela ($b_0 + b_1x_1 + b_2x_2$) predstavlja ravan. Kada između zavisne i nezavisnih promenljivih postoji funkcionalna veza sve tačke se nalaze na ravni. Tada za svaku kombinaciju nezavisno promenljivih postoji samo jedna vrednost zavisno promenljive yi koja bi se nalazila na ravni.

Regresionu ravan predstavlja jednačina:

$$E(yi) = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2.$$

b_0 - odsečak u kome ravan seče y osu,

b_1 - prosečna promena zavisno promenljive y kada se nezavisno promenljiva x_1 poveća za 1, a nezavisna promenljiva x_2 ostaje nepromenjena,

b_2 - prosečna promena zavisno promenljive y kada se nezavisno promenljiva x_2 poveća za 1, a nezavisna promenljiva x_1 ostaje nepromenjena.

Izjednačavanjem parcijalnih izvoda po b_0, b_1 i b_2 dobija se sledeći sistem normalnih jednačina:

$$\Sigma y = b_0 n + b_1 \Sigma x_1 + b_2 \Sigma x_2$$

$$\Sigma x_1 y = b_0 \Sigma x_1 + b_1 \Sigma x_1^2 + b_2 \Sigma x_1 x_2$$

$$\Sigma x_2 y = b_0 \Sigma x_2 + b_1 \Sigma x_1 x_2 + b_2 \Sigma x_2^2.$$

Koeficijente b_1 i b_2 možemo izračunati preko koeficijenta proste linearne korelacije i standardnih devijacija i to:

$$b_1 = \frac{ryx_1 - ryx_2 * rx_1x_2}{1 - rx_1x_2^2} * \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_1}}$$

$$b_2 = \frac{ryx_2 - ryx_1 * rx_1x_2}{1 - rx_1x_2^2} * \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_2}}$$

$$bo = \bar{y} - b_1\bar{x}_1 - b_2\bar{x}_2$$

Zbog lakšeg postupka obračunavanja ocenjenih vrednosti umesto originalnih vrednosti x_1, x_2 i y vrši se njihovo centriranje i uzimaju se vrednosti odstupanja od njihovih aritmetičkih sredina:

$$d_1 = x_1 - \bar{x}_1, \qquad d_2 = x_2 - \bar{x}_2, \qquad d_y = y - \bar{y}$$

gde je $\Sigma d_1 = 0$, $\Sigma d_2 = 0$ i $\Sigma dy = 0$.

$$bo = \bar{y} - b_1\bar{x}_1 - b_2\bar{x}_2$$

$$b_1 = \frac{\Sigma d_2^2 \Sigma d_1 dy - \Sigma d_1 d_2 \Sigma d_2\, dy}{\Sigma d_1^2\, \Sigma d_2^2 - (\Sigma d_1 d_2)^2}$$

$$b_2 = \frac{\Sigma d_1^2\, \Sigma d_2 dy - \Sigma d_1 d_2 \Sigma d_1\, dy}{\Sigma d_1^2\, \Sigma d_2^2 - (\Sigma d_1 d_2)^2}.$$

Standardna greška trodimenzionalne linearne regresije je:

$$S_e = \sqrt{\frac{\Sigma(y - y')^2}{n - 3}}.$$

Koeficijent višestruke linearne determinacije predstavlja procenat varijacija zavisne promenljive *y* objašnjen zajedničkim uticajem nezavisnih promenljivih koje su uključene u model:

$$R^2 = \frac{b_1 \Sigma d_1\, dy + b_2 \Sigma d_2 dy}{\Sigma dy^2}$$

Njegova vrednost, kao i kod prostog regresionog modela, varira između 0 i 1. Njegov nedostatak je u tome što zavisi od veličine uzorka i broja promenljivih u regresionom modelu. Koeficijent višestruke determinacije se nerealno bliži jedinici kod malih uzoraka, a velikog broja nezavisnih promenljivih. Uključivanjem nove nezavisne promenljive ovaj koeficijent se povećava, bez obzira na stvarni uticaj te promenljive. Zbog toga se koeficijent višestruke determinacije koriguje na sledeći način:

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{n - 1}{n - (k+1)} (1 - R^2),$$

gde je n – veličina uzorka, a k – broj nezavisnih promenljivih.

Korekcijom se smanjuje vrednost višestrukog koeficijenta determinacije.

Ukoliko se posmatra međusobna zavisnost između tri i više pojava onda je reč o *višestrukoj linearnoj korelacionoj analizi.*

Kod višestruke linearne korelacione analize polazi se od pretpostavke da su sve posmatrane promenljive slučajne. Ovaj koeficijent koristi se za ocenu linearne korelacione veze između zavisne promenljive *y*i grupe nezavisnih promenljivih x_1, x_2,..., xk. Kao i kod proste linearne korelacije on se može izračunati kao pozitivan kvadratni koren koeficijenta višestruke linearne determinacije R^2:

$$R = +\sqrt{R^2}$$

Vrednost ovog koeficijenta kreće se u intervalu od 0 do 1 i on nikada ne može biti negativan. Pravila za tumačenje rezultata koja važe kod koeficijenta proste linearne korelacije važe i ovde.

Koeficijent višestruke linearne korelacije obeležja *y* u odnosu na x_1 i x_2 računa se:

$$r_{y(x_1,x_2)} = \sqrt{1 - \frac{\sigma_{yc}^2}{\sigma_y^2}}.$$

Ovaj koeficijent možemo obračunati oslanjajući se na koeficijent proste linearne korelacije:

$$r_{y(x_1 x_2)} = \sqrt{\frac{r^2yx_1 + r^2yx_2 - 2ryx_1\, ryx_2\, rx_1x_2}{1 - r^2x_1x_2}}.$$

PARCIJALNA LINEARNA KORELACIONA ANALIZA

Kada postoji veza između nezavisnih promenljivih, onda koeficijent proste linearne korelacije ne daje pouzdane informacije o intenzitetu veze između pojedinih promenljivih u zavisnosti od stepena slaganja između nezavisnih promenljivih.

Parcijalna linearna korelacija nam omogućava analiziranje međuzavisnosti dve od tri promenljive pri čemu je uticaj treće promenljive isključen. Njome ispitujemo vezu između odabranih promenljivih pri istovremenom elimiisanju uticaja drugih promenljivih. Između koeficijenta parcijalne linearne korelacije i koeficijenta proste linearne korelacije postoji razlika. Kod proste linearne korelacije polazi se od pretpostavke da promenljive koje nisu uzete u analizu ne utiču na zavisnu promenljivu, dok je kod parcijalne korelacione analize suprotna pretpostavka.

Koeficijent parcijalne linearne korelacije, kao i koeficijent proste linearne korelacije, uzima vrednost od –1 do 1.

Ovde ćemo se ograničiti na model sa dve nezavisne promenljive i isključivaćemo uticaj samo nezavisnih promenljivih. U tom slučaju *koeficijent parcijalne linearne korelacije* pokazuje stepen linearnog slaganja varijacija zavisne promenljive i jedne nezavisne promenljive, dok je uticaj druge nezavisne promenljive isključen.

Ovaj koeficijent se označava sa $r_{yxi * xj}$, gde se „*" čita: sa isključenjem i može uzimati vrednosti između -1 i 1.

Opšti obrazac za izračunavanje parcijalnog koeficijenta korelacije, preko koeficijenta proste linearne korelacije osnovnog skupa je:

$$r_{yx_i * x_j} = \frac{ryx_i - ryx_j rx_i x_j}{\sqrt{(1 - ryx_i^2)}\sqrt{1 - rx_i x_j^2}},$$

gde r_{yxi}, i r_{yxj} predstavljaju koeficijente proste korelacije između promenljivih na koje se indeksi odnose, a *i* i *j* mogu uzimati vrednosti 1 i 2.

Matematičkim putem možemo utvrditi da je:

$$R^2_{y(x_1,x_2)} \geq R^2_{12} \quad \text{i} \quad R^2_{y(x_1,x_2)} \geq R^2_{123}.$$

PITANJA ZA DISKUSIJU

- ✓ Kada je prvi put upotrebljen termin „regresija”?
- ✓ Gde korelaciona analiza nalazi primenu?
- ✓ Šta je cilj regresije, a šta cilj korelacije?
- ✓ Navedite nedostatak regresione i korelacione analize.
- ✓ Koja je razlika između regresione i korelacione analize?
- ✓ Objasnite determinističke i stohastičke veze.
- ✓ Kakve su to direktne, a kakve inverzne veze?
- ✓ Kada se primenjuje prosta linearna regresiona anliza?
- ✓ Objasnite dijagram raspršenosti i dajte jedan grafički primer.
- ✓ Objasnite značenje koeficijenata b_1 i b_0.
- ✓ Objasnite standardnu grešku regresije.
- ✓ Objasnite koeficijent determinacije.
- ✓ Koji uslovi moraju biti ispunjeni da bi se vršilo predviđanje vrednosti zavisno promenljive na bazi regresionog modela?
- ✓ Koji faktori utiču na standardnu grešku ocene prosečne vrednosti zavisno promenljive?
- ✓ Objasnite kako se provodi korelaciona analiza.
- ✓ Kakva može biti korelacija između dve posmatrane varijable?
- ✓ Koje vrste veza mogu biti identifikovane između varijable x i y?
- ✓ Objasnite koeficijent proste linearne korelacije.
- ✓ Koje su karakteristike korelacione analize?
- ✓ Objasnite testiranje postojanja linearne korelacione veze između slučajnih veličina X i Y osnovnog skupa.
- ✓ Objasnite korelaciju ranga.
- ✓ Kako se sprovodi korelaciona analiza kategoričkih varijabli?
- ✓ Objasnite prostu drugostepenu paraboličnu regresiju i korelaciju.
- ✓ Objasnite eksponencijalnu regresiju i korelaciju.
- ✓ Linearna višestruka regresija i korelacija.
- ✓ Parcijalna linearna korelaciona analiza.

6.

Analiza komponenti vremenske serije

Komponente vremenske serije

-Trend (linearni, parabolični, eksponencijalni)

Određivanje adekvatne funkcije trenda

-Sezonska komponenta

-Ciklična komponenta

POJAM, CILJEVI I KLASIFIKOVANJE VREMENSKIH SERIJA

„Vremenska serija se definiše kao skup kvantitativnih zapažanja raspoređenih po hronološkom redosledu".[61] Ona „podrazumeva uređeni niz opservacija"[62]. Posmatrane opservacije su međusobno zavisne na šta se oslanjamo prilikom formiranja modela vremenske serije. Na osnovu opservacija u prethodnom periodu možemo vršiti predviđanja budućih kretanja posmatrane pojave. Vremenska serija se može definisati i kao „serija podataka prikupljenih za istu jedinicu posmatranja o jednoj istoj promenljivoj u različitim vremenskim trenucima ili vremenskim periodima"[63].

Vremenske serije se koriste u oblasti ekonometrije. One se javljaju u demografiji, inženjeringu, ekonomiji, finansijama, medicini, meteorologiji, geofizici, poljoprivredi i drugo.

Osnovni ciljevi modeliranja i analize vremenskih serija su:[64]

- „Razumevanje dinamičke ili vremenske zavisnosti jedne vremenske serije na osnovu opažanja njene strukture – univarijantna analiza vremenskih serija.
- Provera zaostajanja i povratnih veza između nekoliko vremenskih serija – multivarijaciona analiza vremenskih serija".

Parcijalni ciljevi analize vremenske serije su:[65]

- „Deskripcija vremenske serije;
- Objašnjenje vremenske serije;
- Predviđanje i kontrola vremenske serije".

Deskripcijom vremenske serije uz pomoć grafičkih prikaza i sumarnih statistika dobijaju se informacije o njenim ključnim karakteristikama: da li je u pitanju stacionarna serija, da li ima normalan raspored ili je potrebno izvršiti njeno prilagođavanje i slično. U narednom koraku vrši se izbor ekonometrijskog

---

[61] Kirchgässner, G., Wolters, J., Hassle, U., 2013. *Introduction to Modern Time Series Analysis*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Germany, pp. 1.
[62] Kovačić, Z., 1995. *Analiza vremenskih serija,* Ekonomski fakultet, Beograd, str. 2.
[63] Mann, P., 2009. *Uvod u statistiku,* Ekonomski fakultet, Beograd, str. 15.
[64] Peña, D., Tiao, G., Tsay, R., 2001. *A Course in Time Series Analysis*, John Wiley & Sons, New York, pp. 1.
[65] Kovačić, Z., 1995. *Analiza vremenskih serija,* Ekonomski fakultet, Beograd, str. 6.

modela koji bi mogao na najbolji način objasniti kretanje jednodimenzionalne ili višedimenzionalne vremenske serije. Na osnovu odabranog ekonometrijskog modela prognoziramo buduća kretanja vremenske serije. Pri tom se oslanjamo na različite statističke testove i kriterijume kojima se proverava valjanost korišćenog modela za prognoziranje u komparaciji sa drugim konkurentskim modelima. Nakon ove faze ulaznu seriju podataka prilagođavamo tako da izlazni procesi budu blizu željenog cilja.

Momentnim ili intervalnim vremenskim serijama prikazujemo dinamičke pojave. Dinamičke pojave pokazuju velike promene tokom vremena zbog čega ih je neophodno ispitati.

Vremenske serije mogu biti *stacionarne* i *nestacionarne*. Statistička svojstva stacionarnih vremenskih serija su nezavisna od vremena, a to znači da proces generisanja podataka ima konstantnu srednju vrednost i da je varijabilnost vremenskih serija konstantna tokom vremena.[66] Nestacionarne vremenske serije su serije sa vremenski zavisnim nivoom i (ili) varijansom. Nestacionarnoj vremenskoj seriji odgovara deterministički trend ukoliko se njena sredina može predstaviti determinističkom funkcijom vremena. Vremenska serija sadrži stohastički trend ukoliko se postupkom diferenciranja dobija stacionarna serija.

KOMPONENTE VREMENSKE SERIJEE

U većini vremenskih serija moguće je izdvojiti sledeće komponente koje izazivaju njihove varijacije:[67]

- „Trend komponenta;
- Sezonska komponenta;
- Ciklična komponenta:
- Komponenta neregularnosti".

Vremenske serije najčešće pokazuju dugoročnu tendenciju rasta ili pada

[66] Anderson, D., Sweeney, D., Williams, T., 2011. *Statistics for business and economics, 11 th Edition,* Cengage Learning, USA, pp. 787.

[67] Newbold, P., Carlson, W., Thorne, B., 2010. *Statistika za poslovanje i ekonomiju*, Mate, Zagreb, str. 724.

što ukazuje na postojanje trend komponente. Na kretanje vremenske serije, pored trenda, mogu uticati i sezonski faktori. Sezonske varijacije vremenske serije nastaju u kraćim intervalima od godinu dana, ali se ponavljaju duži niz godina. Mnoge vremenske serije ekonomskog karaktera ispoljavaju ciklične obrasce ponašanja koji nisu uslovljeni delovanjem sezonskih faktora i oni se javljaju u razmacima od nekoliko godina. Ukoliko vremenska serija ispoljava slučajne obrasce ponašanja uslovljene nekim nepredvidivim faktorima u pitanju je komponenta neregularnog ponašanja (rezidualne varijacije).

Vremensku seriju možemo prikazati kao proizvod njenih komponenti na sledeći način:

$$Y=T*S*C*R$$

gde je: *y* – podaci vremenske serije, *T* – trend komponenta, *S* – sezonska komponenta, *C* – cilična komponenta, *R* – neregularna komponenta.

Trend kao komponenta vremenske serije

Trend je dominantna komponenta u statističkom modelu vremenskog niza. Reč je metodi čijom primenom je moguće pratiti dinamiku pojave nastale pod uticajem stalnih faktora i vršiti prilagođavanje i predviđanje vremenskih serija. Trend predstavlja dinamičku srednju vrednost jer se uz pomoć njega izračunava prosečno stanje pojave u svakom posmatranom periodu. Reč je o putanji kretanja neke pojave u vremenu koja predstavlja niz prosečnih vrednosti koje bi posmatrana pojava uzimala po svojoj prirodi. Originalni podaci variraju oko linije trenda i mogu biti regularni (sezonske i ciklične varijacije) i neregularni (slučajne ili rezidualne varijacije).

Podela na deterministički i stohastički trend zavisi od toga da li se rast serije može ili ne može predvideti tokom vremena. *Deterministički trend* može biti predstavljen formulom *a+bx* kojom se određuje prirast ili opadanje vremenske serije u funkciji vremena. *Stohastički trend* je posledica slučajnog rasta, ili pada vrednosti, ili kumulativni efekat neke sile koja prouzrokuje dugoročne promene vrednosti vremenske serije. Kod stohastičkog trenda u trenutku *t-1* ne možemo znati nivo promenljive u trenutku *t*. Stohastički trend je karakterističan za ekonomske pojave. Trend može biti posledica promena u društvu, tehnologiji, društvenih običaja, tržišnih i ekonomskih uslova, uslova u okruženju i slično.[68]

[68] Yaffee, R., McGee, M., 2000. *Introduction to Time Series Analysis and Forecasting: With Applications of SAS and SPSS*, Acad. Press, San Diego, California, pp. 46.

Prilikom dugoročne analize trenda kretanja posmatrane pojave pretpostavlja se da na njen razvoj deluje jedna grupa faktora koja povremeno skreće tok pojave naviše ili naniže, dok druga grupa faktora deluje stalno u jednom pravcu. Analizom vremenskih serija moguće je izdvojiti sve one faktore koji remete uticaj faktora koji deluju stalno u jednom pravcu. Liniju trend možemo prikazati grafički i uz pomoć odgovarajuće matematičke funkcije.

Na osnovu praktičnih iskustava najpogodnije je primeniti trend za dinamičku analizu jednogodišnje vremenske serije. Takođe, primena trenda ima smisla ukoliko su predviđanja koja se vrše na osnovu njega zasnovana na pretpostavci da će posmatrana pojava postojati i u budućnosti. Da bi se izvršila analiza trenda ne postoji tačno definisan broj podataka koji se mora uzeti u razmatranje, već onaj broj podataka na osnovu koga se može steći utisak o vrsti i obliku kretanja pojave u funkciji vremena predstavlja dovoljan broj podataka. Predviđanje posmatrane pojave može se vršiti najviše za vremenski period koji je dva puta kraći od perioda na koji se odnosi vremenska serija. Dužina perioda predviđanja zavisi od toga koliko dugo posmatrana pojava ispoljava isti ili slični tok kretanja.

Kako odrediti tip funkcije trenda?

Podaci vremenske serije kreću se na određeni način tako da njihova linija kretanja ima svoj oblik. Za adekvatnu analizu trenda kretanja posmatrane pojave neophodno je odrediti koji tip trenda najviše odgovara posmatranoj pojavi. Prilagodljivost funkcije trenda originalnim podacima može se oceniti nekom od sledećih metoda:[69]

- „Grafičkim metodom,
- Metodom polu – proseka,
- Metodom pokretnih proseka,
- Metodom najmanjih kvadrata."

Grafički metod određivanja vrste trenda zasniva se na vizuelnom posmatranju dijagrama raspršenosti ili poligona frekvencija vremenske serije, na osnovu kojih se ocenjuje koji tip funkcije trenda najviše odgovara posmatranoj seriji. Ovaj metod nije pouzdan i daje bolje rezultate kod dužih vremenskih serija. Takođe, ukoliko analitičar nema prethodno iskustvo u analizi trenda ne bi trebalo da se oslanja na ovaj metod.

[69] Bary, G. C. 2010. *Business statistics, 3rd Edition,* Tata McGraw-Hill Education, New Delhi, pp. 550.

Kod *metoda polu – proseka* vremenska serija se deli na dva dela sa jednakim brojem godina. Potom se izračunavaju prosečne vrednosti svakog dela i njima se prilagođava linija trenda. Kroz dobijene prosečne vrednosti povlači se linija koja predstavlja liniju trenda polu – proseka. Na ovaj način mogu se izračunati parametri bo i b_1 na osnovu kojih se može vršiti predviđanje kretanja pojave u budućnosti.

Primena metoda polu - proseka **Primer 14.**

Na osnovu hipotetičkih podataka odredite adekvatnu funkciju trenda.

Godine	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Y	12	14	20	22	22	27	25	34

Godine	y	x	Prosek
2008	12	0	
2009	14	1	68/4 =17
2010	20	2	
2011	22	3	
2012	22	4	
2013	27	5	108/4 =27
2014	25	6	
2015	34	7	

Prosečna vrednost prve polovine podataka iznosi 17 i smeštena je između 2009. i 2010. godine, a prosečna vrednost druge polovine iznosi 27 i nalazi se između 2013. i 2014. godine. Na osnovu linije trenda polu – proseka mogu se odrediti sledeće vrednosti:

$$17=a+b \ \text{ i } \ 27=a+4b.$$

Rešavanjem sistema jednačina određujemo da je a=13,67, dok je b=3,33. Na osnovu toga linija trenda ima sledeći oblik:

$$Yt=13{,}67+3{,}33x.$$

U cilju provere možemo izračunati proizvodnju za 2010. godinu:

$$Yt=13{,}67+3{,}33*2=13{,}67+6{,}66=20{,}33$$

i dobijenu trend vrednost uporedimo sa originalnom vrednošću u 2010. godine:

$$y-yt=20-20{,}33=0{,}33.$$

Na osnovu dobijene vrednosti uočavamo da je vrlo mala razlika između originalne i trend vrednosti.

Prednost primene ovog metoda je u tome što je jednostavan i zasniva se na egzaktnoj proceduri tako da će svaka osoba koja primenjuje ovu metodu dobiti istu liniju trenda. Međutim, ovaj metod nije pogodan za primenu ukoliko vremenska serija sadrži ekstremne vrednosti.

Metod pokretnih proseka se ne koristi samo da bi se odredila funkcija trenda, več i da se isključe sezonske i ciklične varijacije. Nedostatak primene ovog metoda je u tome što skraćuje vremensku seriju, pa nije pogodan za primenu kod kraćih vremenskih serija. Kod ovog metoda svakoj vrednosti originalnog podatka vremenske serije yi, kada je i=1, 2, 3, ..., n; pridružuju se 1, 2, 3 ili više vrednosti iz perioda koji prethodi i toliko podataka iz perioda koji sledi, da bi se nakon toge izračunala srednja vrednost tako dobijenih podataka.

Izračunavanje pokretnog proseka III reda **Primer 15.**

$$y_{n-1} = \frac{y_{n-2} + y_{n-1} + y_n}{3}$$

Vrednost pokretnog proseka III reda zamenjuje podatak y_{n-1}.

Izračunavanje pokretnog proseka IV reda **Primer 16.**

Za razliku od pokretnih proseka neparnog reda koji zamenjuje tačno određeni podatak vremenskog niza, kao što smo videli kod pokretnog proseka III reda, pokretni proseci parnog reda ne pridružuju se nijednom članu vremenske serije. Pokretne proseke IV reda računamo na sledeći način:

$$\bar{y}_{2/3} = \frac{y1 + y2 + y3 + y4}{4}$$

$$\bar{y}_{3/4} = \frac{y2 + y3 + y4 + y5}{4}$$

$$\bar{y}_{4/5} = \frac{y3 + y4 + y5 + y6}{4}$$

.

.

.

Da bismo pridružili pokretne proseke parnog reda određenom članu vremenske serije zbir susednih pokretnih proseka delimo sa brojem 2. Na primer podatak y_3 i y_4 zamenjuju sledeće vrednosti:

$$\bar{y}_3 = \frac{\bar{y}_{2/3} + \bar{y}_{3/4}}{2} \quad \text{i} \quad \bar{y}_4 = \frac{\bar{y}_{3/4} + \bar{y}_{4/5}}{2}.$$

Metod najmanjih kvadrata je najčešće korišćeni metod. On se zasniva na pronalaženju vrednosti za *a* i *b* na osnovu sistema normalnih jednačina:

$$\Sigma Y = na + b\Sigma X \quad \text{i} \quad \Sigma XY = a\Sigma X + b\Sigma X^2.$$ [70]

Originalnim podacima odgovara ona linija trenda kod koje je minimalan zbir kvadrata odstupanja od linije trenda.

$$\sum_{i=1}^{n} (yi - yt)^2$$

Postoje još neke metode koje omogućavaju da se odredi adekvatna linija trenda za posmatranu vremensku seriju:[71]

- „Metod diferencija i
- Standardna greška trenda."

Metod direfencija predstavlja jedan od najjednostavnijih statističkih metoda koji se zasniva na sledećim pravilima:[72]

- Kada su prve diferencije jednake, odnosno, kada su apsolutne razlike jednake za posmatrani period, onda je reč o linearnom trendu.
- Ukoliko su diferencije drugog reda približno iste, odnosno, kvadrati apsolutnih razlika jednaki za posmatrani period, reč je o drugostepenom paraboličnom trendu.
- Ukoliko su prve diferencije logaritamskih vrednosti podataka vremenskog niza približno jednake, a originalni podaci se približavaju geometrijskoj progresiji u pitanju je eksponencijalni trend.

Ukoliko se na osnovu pomenutih metoda ne može pouzdano odrediti adekvatna funkcija trenda možemo se osloniti na primenu *standardne greške trenda*. Standardna greška trenda je jedan od najpreciznijih metoda za određivanje adekvatne vrste trenda. Prema ovom metodu za posmatranu vremensku seriju reprezentativan je onaj tip trenda čija je standardna greška najniža. Standardna greška trenda za sve vrste trenda izračunava se na sledeći način:

$$S_y = \sqrt{\frac{\Sigma(y - yt)^2}{N}}$$

Ukoliko originalne podatke vremenske serije podelimo sa vrednostima

[70] Bary, G. C. 2010. *Business statistics, 3rd Edition,* Tata McGraw-Hill Education, New Delhi, pp. 555.
[71] Lovrić, M., 2008. *Osnovi statistike*, Ekonomski fakultet, Kragujevac, str. 319.
[72] Đorđevic, V., 2006. *Statistika u ekonomiji*, Ekonomski fakultet, Niš, str. 338.

trenda *(y / yt)* možemo *isključiti uticaj trenda na vremensku seriju*. Množenjem tako dobijenih podataka sa 100 možemo utvrditi da li nepostojani faktori deluju u pravcu povećanja vrednosti pojave (za veće vrednosti od 100) ili smanjenja vrednosti pojave (za manje vrednosti od 100).

Linearni trend

Linearni trend se može primeniti kod vremenske serije u kojoj su prisutne centralne tendencije razvoja i kretanja u pravolinijskom smeru. Uslov je da kod posmatrane pojave promene koje se javljaju tokom posmatranog perioda u vidu stalnog porasta ili opadanja imaju približno isti intenzitet.

Linearni trend posmatrane vremenske serije može biti prikazan grafički i računski oslanjajući se na odgovarajuće matematičke metode. Linija trenda prolazi kroz originalne podatke vremenske serije, prati njihov pravac kretanja, dok je zbir odstupanja pojedinih vrednosti vremenske serije od linije trenda jednak nuli.

$$\sum_{i=1}^{n} (yi - yt) = 0$$

Samo jedna prava može ispuniti ovaj uslov. Takođe, kvadratno odstupanje originalnih podataka od linije trenda mora biti minimalna da bi se primenio ovaj tip trenda.

$$\sum_{i=1}^{n} (yi - yt) = \min$$

Llinearni trend se računski dobija pomoću metoda najmanjih kvadrata, oslanjajući se na sistem normalnih jednačina:

$$\Sigma Y = nb_o + b_1 \Sigma X \quad \text{i} \quad \Sigma XY = b_o \Sigma X + b_1 \Sigma X^2.$$

S obzirom na to da X predstavlja nezavisnu promenljivu veličinu (vreme) $\Sigma X=0$, onda $b_1\Sigma X$ teži nuli, kao i boΣX i sistem normalnih jednačina dobija sledeći oblik:

$$\Sigma Y = nb_o \quad \text{i} \quad \Sigma XY = b_1 \Sigma X^2,$$

Odakle izračunavamo b_o i b_1:

$$bo = \frac{\Sigma y}{n} \quad \text{i} \quad b_1 = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}.$$

Oblik funkcije linearnog trenda izgleda ovako:

$$Y_t = b_o + b_1 X,$$

gde je;

y_t – trend vrednosti posmatrane pojave;

b_o – prosek vremenske serije u posmatranom periodu, odnosno, pokazuje vrednost trenda kada je x=0;

b_1 – koeficijent pravca koji pokazuje srednji apsolutni porast, odnosno, stalnu veličinu porasta ili opadanja trenda u sukcesivnim vremenskim periodima;

x – nezavisno promenljiva veličina (vreme).

Liniju trenda dobijamo tako što u prethodnoj formuli umesto nezavisne promenljive X za svaki posmatrani vremenski trenutak zamenimo odgovarajuću vrednost (na primer: kolona yt u tabeli koja sledi).

Vrednost nezavisne promenljive X određujemo u zavisnosti da li vremenska serija sadrži paran ili neparan broj podataka.

- Ukoliko vremenska serija sadrži neparan broj podataka, vrednost promenljive X koja odgovara sredini serije je nula (0). Periodima koji prethode ishodišnom (nultom) periodu hronološkim redom se dodeljuju vrednosti –1, –2, –3, ..., dok se periodima koji slede dodeljuju vrednosti +1, +2, +3, ...
- Ukoliko vremenska serija sadrži paran broj podataka, izdvajaju se dva člana koja se nalaze na sredini vremenske serije i obeležavaju sa –0,5 i +0,5. Periodima koji im prethode hronološkim redom se dodeljuju vrednosti –1,5; –2,5; –3,5; ...; dok se periodima koji slede dodeljuju vrednosti +1,5; +2,5; +3,5; ...;.

Na osnovu linearnog trenda može se vršiti *ekstrapolacija trenda*, odnosno, prognoziranje budućih vrednosti posmatrane pojave. Da bi se izvršila ekstrapolacija trenda neophodno je da faktori koji su delovali na posmatranu pojavu i dalje deluju istim intenzitetom, kao i da ne dolazi do pojave novih faktora. Takođe, potrebno je da imamo dugu vremensku seriju. Kada je u pitanju prognoziranje kod ekonomskih pojava, tačnije će biti prognoze koje se vrše u periodima poslovne stabilnosti, kao i one prognoze koje se više odnose na makroekonomske veličine. Ukoliko su jako izražene ciklične varijacije nije preporučljivo vršiti prognoziranje.

Izračunavanje linearnog trenda **Primer 17.**

Na osnovu podataka o prilivima stranih direktnih investicija (SDI) u Republici Srbiji izračunajte: a) linearni trend, b) standardnu grešku trenda i c) predvidi trend kretanja za 2018. godinu.

Godine	SDI	Godine	SDI	Godine	SDI	Godine	SDI
1992	126	1997	740	2002	563	2007	4373
1993	96	1998	113	2003	1516	2008	2955
1994	63	1999	112	2004	1024	2009	1959
1995	45	2000	52	2005	2078	2010	1329
1996	0	2001	117	2006	4878	2011	2709
				2012	650		

Tabela 16. Prilivi stranih direktnih investicija u milionima $ u Republici Srbiji

Godine	SDI u Srbiji	X	x*y	X^2	Yt	y-yt	(y-yt)2
1992	126	-10	-1260	100	-298,51	424,51	180208,7
1993	96	-9	-864	81	-147,24	243,24	59165,7
1994	63	-8	-504	64	4,03	58,97	3477,461
1995	45	-7	-315	49	155,3	-110,3	12166,09
1996	0	-6	0	36	306,57	-306,57	93985,16
1997	740	-5	-3700	25	457,84	282,16	79614,27
1998	113	-4	-452	16	609,11	-496,11	246125,1
1999	112	-3	-336	9	760,38	-648,38	420396,6
2000	52	-2	-104	4	911,65	-859,65	738998,1
2001	117	-1	-117	1	1062,92	-945,92	894764,6
2002	563	0	0	0	1214,19	-651,19	424048,4
2003	1516	1	1516	1	1365,46	150,54	22662,29
2004	1024	2	2048	4	1516,73	-492,73	242782,9
2005	2078	3	6234	9	1668	410	168100
2006	4878	4	19512	16	1819,27	3058,73	9355829
2007	4373	5	21865	25	1970,54	2402,46	5771814
2008	2955	6	17730	36	2121,81	833,19	694205,6
2009	1959	7	13713	49	2273,08	-314,08	98646,25
2010	1329	8	10632	64	2424,35	-1095,35	1199792
2011	2709	9	24381	81	2575,62	133,38	17790,22
2012	650	10	6500	100	2726,89	-2076,89	4313472
Σ	25498	0	116479	770	25497,99	0,01	25038045

Podaci preuzeti sa: United Nations Conference on Trade and Development, World Investment Report 2013/2012/2011/2010. http://www.unctad.org/en/PublicationsLibrary/wir2013_en.pdf; http://unctad.org/en/PublicationsLibrary/wir2012_embargoed_en.pdf; http://unctad.org/en/PublicationsLibrary/wir2011_en.pdf; http://www.unctad.org/en/Docs/wir2010_en.pdf., [09.03.2016. u 18:00]

Rešenje:

a) $$bo=\frac{\Sigma y}{n}=\frac{25498}{21}=1214{,}19$$

$$b1=\frac{\Sigma x^{*}y}{\Sigma x^{2}}=\frac{116479}{770}=151{,}27$$

$$yt = b_0 + b_1 x = 1214{,}19 + 151{,}27x$$

b) $$S_y = \sqrt{\frac{\Sigma(y - yt)^2}{N}} = \sqrt{\frac{25038045}{21}} = 1091{,}919$$

c) $$yt_{2018} = 1214{,}19 + 151{,}27 * 16 = 3634{,}51$$

Trend kretanja priliva stranih direktnih investicija možemo grafički prikazati na sledeći način:

Grafikon 21. Linearni trend

Parabollični trend

Ukoliko centralne tendencije razvoja i kretanja neke vremenske serije nisu pravolinijske, linearnim trendom neće biti najpreciznije iskazano dugoročno kretanje ove pojave. Tada je potrebno primeniti neki drugi tip trenda.

Parabolični trend se obično koristi kod vremenske serije kod koje prosečni apsolutni prirast nije jednak, već iz godine u godunu raste ili opada tako da njen grafički prikaz ima oblik otvorene parabole. Parabolični trend se izračunava na osnovu sledećih jednačina:

$$\Sigma Y = n * b_0 + b_1 \Sigma X + b_2 \Sigma X^2,$$

$$\Sigma XY = b_0 \Sigma X + b_1 \Sigma X^2 + b_2 \Sigma X^3,$$

$$\Sigma X^2Y = b_0\Sigma X^2 + b_1\Sigma X^3 + b_2\Sigma X^4.$$

Kako je $\Sigma X = 0$, onda sledi:

$$\Sigma Y = n^*b_0 + b_2\Sigma X^2,$$

$$\Sigma XY = b_1\Sigma X^2,$$

$$\Sigma X^2Y = b_0\Sigma X^2 + b_2\Sigma X^4.$$

Na osnovu dobijenih jednačina možemo izračunati parametre b_0, b_1 i b_2:

$$b_0 = \frac{\sum y - b_2 \sum x^2}{n}, \qquad b_1 = \frac{\sum xy}{\sum x^2},$$

$$b_2 = \frac{n\sum x^2y - \sum y \sum x^2}{n\sum x^4 - (\sum x^2)^2}.$$

Oblik funkcije paraboličnog trenda izgleda ovako:

$$yt = bo + b_1x + b_2x^2.$$

Izračunavanje paraboličnog trenda **Primer 17**

Na osnovu podataka o broju prevezenih putnika u drumskom saobraćaju u Republici Hrvatskoj izračunajte parabolični trend.

Tabela 17. Broj prevezenih putnika u drumskom prevozu u Republici Hrvatskoj u period između 2002. i 2012. godine

Godine	Broj prevezenih putnika (y)	X	x^2	x*y	x^4	x^2*y	Yt
2002	65582	-5	25	-327910	625	1639550	65397,53
2003	65413	-4	16	-261652	256	1046608	65516,46
2004	64768	-3	9	-194304	81	582912	65291,51
2005	64859	-2	4	-129718	16	259436	64722,66
2006	63576	-1	1	-63576	1	63576	63809,91
2007	63144	0	0	0	0	0	62553,28
2008	62064	1	1	62064	1	62064	60952,75
2009	58493	2	4	116986	16	233972	59008,34
2010	56419	3	9	169257	81	507771	56720,03
2011	52561	4	16	210244	256	840976	54087,82
2012	52293	5	25	261465	625	1307325	51111,73
Σ	669172	-	110	-157144	1958	6544190	669172

Podaci preuzeti sa: Statistički letopis Državnog zavoda za statistiku Republike Hrvatske (2012. I 2013.), dostupno na: http://www.dzs.hr/Hrv_Eng/ljetopis/2012/sljh2012.pdf; http://www.dzs.hr/Hrv_Eng/ljetopis/2013/sljh2013.pdf, [04.06.2016. u 18:00].

Rešenje:

$$b1=\frac{\Sigma x*y}{\Sigma x^2}=\frac{-157144}{110}=-1428{,}58 \qquad b_2=\frac{N\sum x^2y-\sum y\sum x^2}{N\sum x^4-(\sum x^2)^2}$$

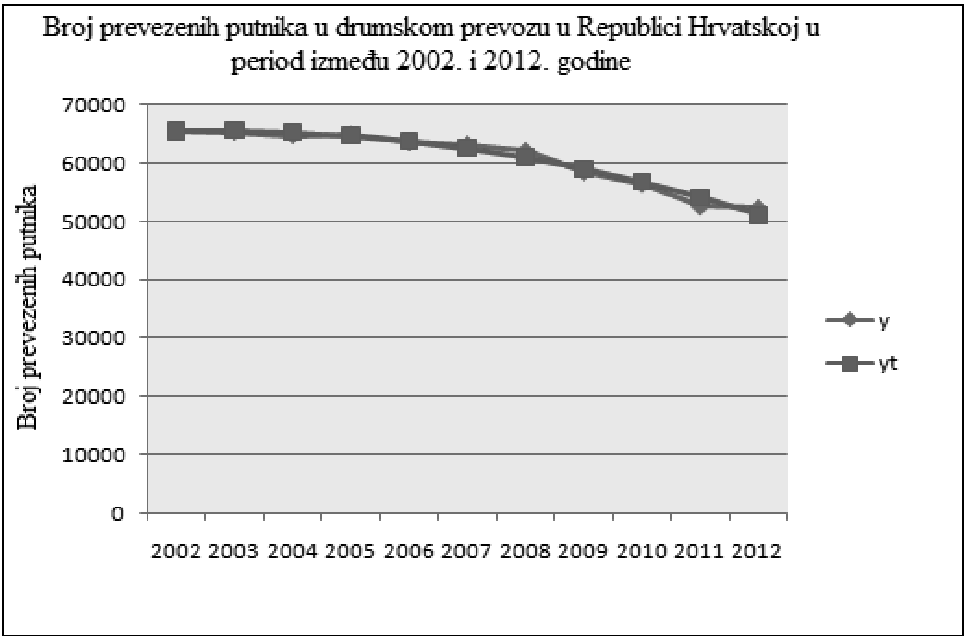
$$b_2=\frac{11*6544190-669172*110}{11*1958-110*110}=\frac{-1622830}{9438}=-171{,}946$$

$$b_0=\frac{\sum y-b_2\sum x^2}{N}=\frac{669172+171{,}946*110}{11}=\frac{688086{,}1}{11}=62553{,}28$$

$$yt = 62553{,}28-1428{,}58x-171{,}946x^2$$

Trend kretanja broja prevezenih lica možemo grafički prikazati na sledeći način:

Grafikon 22. Parabolični trend



Eksponencijalni trend

Eksponencijalni trend predstavlja krivolinijski trend i prilagođava se onoj vremenskoj seriji koja pokazuje karakteristike geometrijske progresije, odnosno, kada posmatrana pojava u sukcesivnim vremenskim periodima pokazuje približno isti tempo rasta ili opadanja.

Ukoliko eksponencijalni trend određujemo grafički onda je neophodno da se na polulogaritamskom dijagramu podaci grupišu približno oko prave linije da bi mogli da kažemo da eksponencijalni trend najbolje reprezentuje datu vremensku seriju.

Oblik funkcije eksponencijalnog trenda izgleda ovako:

$$yt = bo*b_1^x$$

Ukoliko logaritmujemo obe strane dobijamo linearni oblik:

$$\log yt = \log b_0 + x \log b_1$$

Oslanjajući se na metod najmanjih kvadrata parametre b_0 i b_1 računamo na sledeći način:

$$\log b_0\, n + \log b_1\, \Sigma X = \Sigma \log y,$$

$$\log b_0\, \Sigma X + \log b_1\, \Sigma X^2 = \Sigma\, x \log y.$$

Kako je $\Sigma X = 0$, onda sledi:

$$log b_0 = \frac{\sum logy}{n} \quad \text{i} \quad log b_1 = \frac{\sum x * logy}{\sum x^2}.$$

Antilogaritmovanjem dobijamo vrednosti za nepoznate parametre b_0 i b_1.

Na osnovu vrednosti parametra b_1 može se odrediti ***srednji tempo rasta*** posmatrane pojave, kao i ***eksponencijalna stopa rasta***.

Ukoliko je vrednost parametra b_1 veća od 1 za pojavu je karakteristična tendencija rasta, a ukoliko je vrednost parametra b_1 manja od 1, a veća od 0 ($0< b_1 <1$) pojava pokazuje tendenciju opadanja.

Prosečni godišnji procenat rasta vremenske serije u posmatranom vremenskom periodu određujemo uz pomoć *eksponencijalne stope rasta* na sledeći način:

$$r_e = (b_1 - 1)*100.$$

Izračunavanje eksponencijalnog trenda **Primer 18.**

Na osnovu podataka o navodnjavanim površinama zemljišta u Hidromelioracionom sistemu Čačak u periodu između 1982. i 1992. godine izračunajte eksponencijalni trend.

Tabela 18. Navodnjavane površine zemljišta u Hidromelioracionom sistemu Čačak u periodu između 1982. i 1992. godine.

God.	**Y**	**X**	**x^2**	**Logy**	**x*logy**	**log(yt)**	**yt**
1982	550	-5	25	2,740363	-13,702	2,747	558,47
1983	520	-4	16	2,716003	-10,864	2,712	515,23
1984	480	-3	9	2,681241	-8,044	2,677	475,34
1985	405	-2	4	2,607455	-5,215	2,642	438,53
1986	348	-1	1	2,541579	-2,542	2,607	404,58
1987	364	0	0	2,561101	0,000	2,572	373,25
1988	370	1	1	2,568202	2,568	2,537	344,35
1989	375	2	4	2,574031	5,148	2,502	317,69
1990	380	3	9	2,579784	7,739	2,467	293,09
1991	320	4	16	2,50515	10,021	2,432	270,40
1992	165	5	25	2,217484	11,087	2,397	249,46
Σ	4277	0	110	28,29239	-3,802	28,292	4240,37

Podaci preuzeti sa: Šekularac, G., 1994. „Trend navodnjavanih površina na području melioracionog sistema Čačak", *Poljoprivreda i šumarstvo,* Vol. 40, (1-4), Biotehnički fakultet, Univerzitet Crne Gore, Podgorica, str. 34. dostupno na: http://89.188.43.75/agricultforest/20120216-04%20Sekularac.pdf, [13.06.2016. u 21:00].

Rešenje:

$$logb_1 = \frac{\sum x * logy}{\sum x^2} = \frac{-3,802}{110} = -0,035$$

$$logb_o = \frac{\sum logy}{N} = \frac{28,29239}{11} = 2,572$$

$$\log y_t = 2,572+(-0,035)*x$$

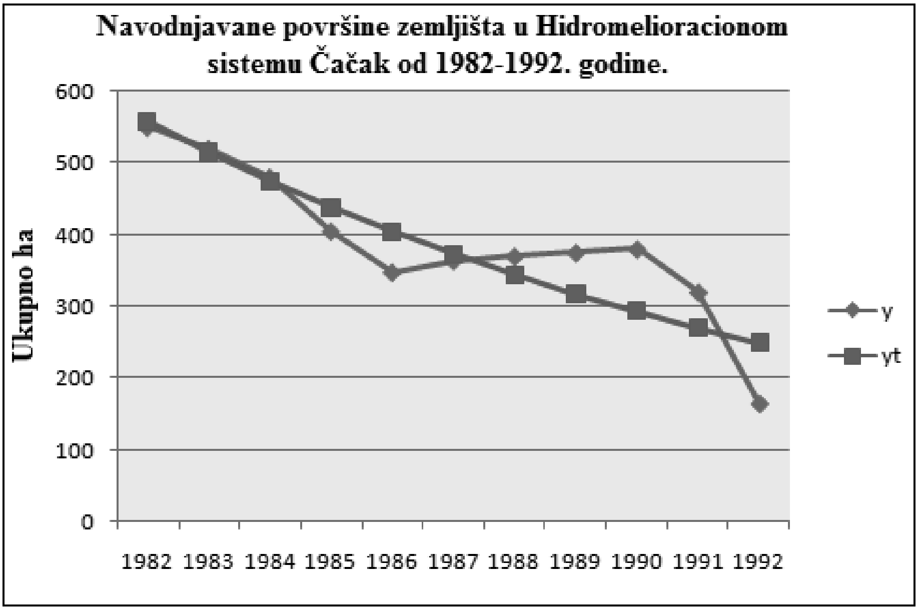
Ukoliko dobijene rezultate antilogaritmujemo dobijamo sledeće vrednosti:

$$b_o = 10^{2,572} = 373,281 \qquad b_1 = 10^{-0,035} = 0,923$$

$$yt = 373,281*0,923^x$$

Trend kretanja navodnjavanih površina možemo grafički prikazati na sledeći način:

Grafikon 23. Eksponencijalni trend



Sezonska komponenta vremenske serije

"Sezonske vremenske serije karakterišu periodične fluktuacije koje se ponavljaju u vremenskim intervalima do godine dana"[73]. Sezonske fluktuacije spadaju u regularna kolebanja oko trenda. Ove fluktuacije se ispoljavaju u isto vreme, na približno isti način. U zavisnosti od toga da li se sezonske varijacije menjaju tokom godine ili ne sezonska priroda može biti deterministička ili stohastička. Za merenje sezonskih varijacija posmatrane pojave izgrađeni su posebni modeli koji se izražavaju vremenskim serijama po mesečnim i kvartalnim intervalima. Sezonski ARIMA modeli primenjuju se za opisivanje stohastičke sezonske komponente. Deterministička sezonska priroda se modelira na bazi sezonskih veštačkih promenljivih.

Vremenski period u kojem se ponovi uočena pojava naziva se period sezone i kod mesečnih vremenskih serija iznosi 12, kod je kvartalnih vremenskih serija 4, a kod polugodišnjih vremenskih serija iznosi 2. Inače, sezonske fluktuacije se uočavaju samo kod vremenskih serija kod kojih su vremenske jedinice kraće od jedne godine.

Veliki broj ekonomskih pojava karakteriše se sezonskim varijacijama

[73] Kovačić, Z., 1995. *Analiza vremenskih serija,* Ekonomski fakultet, Beograd, str. 211.

koje su izražene manje ili više. Sezonska komponenta se posebno ispoljava u određenim privrednim granama kao što je turizam, poljoprivreda, transport, građevinarstvo, dalje, kod uvoza, izvoza, javnih prihoda i rashoda, indeksa industrijske proizvodnje, prometa u trgovini na malo i drugo. Tako, na primer, sezonske fluktuacije su prisutne kod prodaje sladoleda, sokova, piva, ogreva, zimske i letnje garderobe, kao i potrošnje električne energije i vode.

U zavisnosti od toga koliko je sezonski ritam stabilan sezonske indekse izračunavamo na različite načine. Kao metodi za izračunavanje sezonskih indeksa izdvajaju se metod odnosa prema pokretnim sredinama, metod odnosa prema trendu, metod odnosa prema opštem mesečnom, odnosno, kvartalnom proseku, metod odnosa prema lančanim indeksima, metod X-11 i drugi.[74]

Takođe, ukoliko merimo sezonski varijabilitet tokom jedne godine koristimo *specifični sezonski indeks*, dok *tipičnim sezonskim indeksom* merimo sezonske varijacije za više uzastopnih godina.

Izračunavanje sezonskih indeksa metodom odnosa prema opštem mesečnom/kvartalnom proseku **Primer 19.**

Na osnovu podataka o dolascima domaćih turista na području Južne i Istočne Srbije u periodu između 2012. i 2015. godine izračunajte sezonske indekse oslanjajući se na metod odnosa prema opštem mesečnom/kvartalnom proseku.

Tabela 19. Dolasci domaćih turista na području Južne i Istočne Srbije u periodu između 2012. i 2015. godine

Квартали	2012	2013	2014	2015	Просек квартала	Сезонски индекси
I	36260	34104	35917	35588	35467,25	56,04
II	92794	88622	74580	79762	83939,5	132,62
III	85350	79423	77564	84395	81683	129,06
IV	60669	49524	44952	53165	52077,5	82,28

Podaci preuzeti sa: Dolasci domaćih turista na području Južne i Istočne Srbije u periodu od 2012-2015. godine, dostupno na: http://webrzs.stat.gov.rs/website/public/ReportView.aspx, [20.06.2016. u 15:00]

Rešenje:

Proseke kvartala računamo sledećom formulom: $\bar{y}_i = \frac{\Sigma y_{ij}}{4}$.

$\bar{y}_I = 141869/4 = 35467,25$ $\bar{y}_{II} = 335758/4 = 83939,5$

[74] Stojković, M., 1995. Statistika za menadžere, Ekonomski fakultet u Subotici, Subotica, str. 557.

$\bar{y}_{III}$=326732/4=81683 $\bar{y}_{IV}$=208310/4=52077,5

Opšti kvartalni prosek računamo sledećom formulom:

$$\bar{\bar{y}}_i = \frac{\Sigma \bar{y} i}{4},$$

odakle sledi:

$$\bar{\bar{y}}_i = \frac{\Sigma \bar{y} i}{4} = \frac{253167{,}3}{4} = 63291{,}8.$$

Sezonske indekse dobijamo na osnovu sledeće formule:

$$Is = \frac{\bar{y}}{\bar{\bar{y}}_i} * 100$$

odakle sledi:

Is_I=(35467,25/63291,8)*100=56,04%

Is_{II}=(83939,5/63291,8)*100=132,62%

Is_{III}=(81683/63291,8)*100=129,06%

Is_{IV}=(52077,5/63291,8)*100=82,28%

U prvom kvartalu znatno je izražen negativan uticaj sezone jer je sezonski indeks ispod proseka za 43,96%. U drugom kvartalu pozitivan uticaj sezone je najizraženiji jer je tu najveći sezonski indeks (32,62% iznad proseka). Takođe, u trećem kvartalu gde je sezonski indeks 29,06% iznad proseka, dok je u četvrtom kvartalu prisutan negativan uticaj sezone gde je sezonski indeks 17,72% ispod proseka.

Vremenske serije sa stabilnim i nestabilnim sezonskim ritmom

U vremenskom periodu od više godina sezonski varijabilitet može biti stabilan i tada varijabilitet ima isti intenzitet i smer, a može biti i nestabilan kada su prisutne značajne promene sezonskih kolebanja.

Tipičnim sezonskim indeksima meri se sezonski varijabilitet, na duži rok, u uslovima *stabilnog* sezonskog tržišta.

Dekompoziciju vremenske serije, u cilju izdvajanja sezonske varijacije od drugih komponenti, vršimo uz pomoć *metoda odnosa prema pokretnim* *sredinama*. Ovaj metod polazi od pretpostavke da se ciklična i neregularna komponenta mogu izračunati uz pomoć aritmetičkih sredina pojedinih kvartala.

Polazeći od modela vremenske serije:

$$y = T * S * C * R$$

pomoću metoda odnosa prema pokretnim sredina (mesečnim ili kvartalnim) potrebno je izolovati trend i cikličnu komponentu, kako bi se kasnije izdvojile sezonska i rezidualna komponenta.

$$SK = \frac{TSCR}{TC}$$

Sezonski indeks se izračunava na osnovu sledeće formule:

$$I_s = \frac{\sum SR}{n}$$

Za izračunavanje kvartalnih aritmetičkih sredina najpre se obračunavaju pokretni prosece, a nakon toga se oni centriraju.

$$-, -, \bar{y}_3, \bar{y}_4, ...$$

Ukoliko podelimo originalne podatke vremenske serije sa centriranim pokretnim prosecima dobićemo sezonske koeficijente:

$$-, -, \frac{y_3}{\bar{y}_3}, \frac{y_4}{\bar{y}_4}, \frac{y_5}{\bar{y}_5}, .$$

Nakon toga, proseke sezonskih koeficijenata množimo sa 100 i dobićemo tipične sezonske indekse.

$$I_s = \frac{y}{\bar{y}}$$

gde je *Is* specifičan sezonski indeks, *y* vrednost posmatrane pojave, a $\bar{y}$ vrednost centriranog pokretnog proseka.

Za odstranjivanje uticaja ciklične i rezidualne komponente izračunavaju se prosečne vrednosti iz specifičnih sezonskih indeksa i dobijamo prosečne ili tipične sezonske indekse:

$$I = \frac{\sum I_s}{n - 1}.$$

Desezoniranje podataka vremenske serije vrši se deljenjem originalnih kvartalnih ili mesečnih podataka sa odgovarajućim sezonskim indeksom:

$$y' = \frac{y}{Is} * 100$$

U vremenskom periodu od više godina *sezonski varijabilitet može biti nestabilan* kada su prisutne značajne promene sezonskih kolebanja. Tipični sezonski indeksi nisu reprezentativni u situaciji kada je prisutan izražen sezonski ritam. U ovakvim slučajevima izračunavaju se pokazatelji koji sadrže i promene koje su nastale u okviru samog sezonskog ritma.

Sezonske varijacije ovakvih pojava se najčešće mere *metodom pokretnih sredina*. Ovaj metod omogućava obračun *specifičnih sezonskih indeksa*. Ukoliko specifični sezonski indeksi imaju tendenciju opadanja ili rasta u dužem vremenskom periodu od njih se može formirati serija. Tako se za *n* posmatranih godina formira jedna serija specifičnih indeksa na mesečnom ili kvartalnom nivou. Za svaku seriju specifičnih indeksa moguće je odrediti liniju trenda.

Dakle, specifični sezonski indeksi ukazuju na tendenciju promene sezonskog ritma, dok tipični sezonski indeksi, kao proseci, izravnavaju varijacije specifičnih indeksa po godinama.

Uz pomoć sezonskih indeksa može se vršiti i *predviđanje budućih vrednosti posmatrane pojave*. Metodom ekstrapolacije trenda možemo proceniti prosečne vrednosti za željene buduće vremenske intervale. Ukoliko vrednost odgovarajućeg tipičnog sezonskog indeksa pomnožimo sa pojedinačnim, kvartalnim ili mesečnim vrednostima trenda vršimo prognoziranje buduće vrednosti pojave.

U situaciji kada se javlja nestabilan sezonski ritam, pa se sezonske fluktuacije pomeraju manje ili više u određenom smeru, neophodno je oslanjati se na korigovane sezonske indekse, odnosno, mesečne (kvartalne) trendove.

Pažljivom analizom neke vremenske serije možemo uočiti da njeno kretanje nije 100% prilagođeno liniji trenda. Pod uticajem sezonskih faktora, a posebno u kraćem vremenskom intervalu, originalni podaci odstupaju od linije trenda. Zbog toga ekstrapolisane vrednosti trenda treba korigovati sezonskim indeksima.

Izračunavanje sezonskih indeksa metodom pokretnih proseka **Primer 20.**

Na osnovu podataka o dolascima domaćih turista na području Južne i Istočne Srbije u periodu između 2012. i 2015. godine izračunajte sezonske indekse oslanjajući se na metod odnosa prema opštem mesečnom/kvartalnom proseku. Izvršiti desezoniranje podataka u kvartalu gde je najjači uticaj sezone.

Tabela 20. Dolasci domaćih turista na području Južne i Istočne Srbije u periodu između 2012. i 2015. godine

Квартали	2012	2013	2014	2015	Просек квартала	Сезонски индекси
I	36260	34104	35917	35588	35467,25	56,04
II	92794	88622	74580	79762	83939,5	132,62
III	85350	79423	77564	84395	81683	129,06
IV	60669	49524	44952	53165	52077,5	82,28

Podaci preuzeti sa: Dolasci domaćih turista na području Južne i Istočne Srbije u periodu od 2012-2015. godine, dostupno na: http://webrzs.stat.gov.rs/website/public/ReportView.aspx, [20.06.2016. u 15:00]

Rešenje:

Prvi korak podrazumeva obračun pokretnih proseka $\overline{y}$:

(36260+92794+85350+60669)/4=68768,25

(92794+85350+60669+34104)/4=68229,25

(85350+60669+34104+88622)/4=67186,25

(60669+34104+88622+79423)/4=65704,5

(34104+88622+79423+49524)/4=62918,25

(88622+79423+49524+35917)/4=63371,5

(79423+49524+35917+74580)/4=59861

(49524+35917+74580+77564)/4=59396,25

(35917+74580+77564+44952)/4=58253,25

(74580+77564+44952+35588)/4=58171

(77564+44952+35588+79762)/4=59466,5

(44952+35588+79762+84395)/4=61174,25

(35588+79762+84395+53165)/4=63227,5

Na osnovu pokretnih proseka izračunavamo centrirane pokretne proseke ($\overline{y}$c):

(68768,25+68229,25)/=68498,75

(68229,25+67186,25)/2=67707,75

(67186,25+65704,5)/2=66445,38

(65704,5+62918,25)/2=64311,38

(62918,25+63371,5)/2=63144,88

(63371,5+59861)/2=61616,25

(59861+59396,25)/2=59268,63

(59396,25+58253,25)/2=58824,75

(58253,25+58171)/2=58212,13

(58171+59466,5)/2=58818,75

(59466,5+61174,25)/2=60320,38

(61174,25+63227,5=62200,88

Godine	Kvartali	Originalni podaci (y)	Pokretni proseci	Centrirani pokretni proseci	Sezonski koeficijenti
2012	I	36260	–	-	-
	II	92794	68768,25	-	-
	III	85350	68229,25	68498,75	1,25
	IV	60669	67186,25	67707,75	0,90
	I	34104	65704,5	32852,25	1,04
2013	II	88622	62918,25	64311,38	1,38
	III	79423	63371,5	63144,88	1,26
	IV	49524	59861	61616,25	0,80
	I	35917	59396,25	29698,13	1,21
	II	74580	58253,25	58824,75	1,27
2014	III	77564	58171	58212,13	1,33
	IV	44952		29085,5	1,55
	I	35588	59466,5	60320,38	0,59
	II	79762	61174,25	62200,88	1,28
2015	III	84395	63227,5	-	-
	IV	53165	-	-	-

Na osnovu dobijene tabele formiramo novu tabelu uz pomoć koje određujemo kvartalne sredine:

$\bar{y}$I=2,84/3=0,95 $\bar{y}$II=3,93/3=1,31

$\bar{y}$III=3,84/3=1,28 $\bar{y}$IV=3,25/3=1,08

i sezonske indekse i to množenjem dobijenih kvartalnih sredina sa 100%.

Kvartal	2012	2013	2014	2015	Kvartalne sredine	Is (sezonski indeksi)
I	-	1,04	1,21	0,59	0,95	95%
II	-	1,38	1,27	1,28	1,31	131%
III	1,25	1,26	1,33	-	1,28	128%
IV	0,90	0,80	1,55	-	1,08	108%

Kako je najjači uticaj sezone primećen u II kvartalu (jer je tu najveći sezonski indeks) u njemu vršimo desezoniranje tako što originalne podatke iz II kvartala za svaku posmatranu godinu delimo sa vrednošću sezonskog indeksa iz II kvartala:

Godine	y_{II}	Is drugog kvartala	y_{II}/Is drugog kvartala
2012	92794	131%	70835,11
2013	88622	131%	67650,38
2014	74580	131%	56931,30
2015	79762	131%	60887,02

Poslednja kolona prethodne tabele reprezentuje kakva bi bila poseta turista u II kvartalu da nije bilo sezonskog uticaja.

Ciklična komponenta vremenske serije

Posmatranjem pojave duži niz godina možemo uočiti faze kontrakcije i ekspanzije koje se ne javljaju u jednakim periodima. U pitanju su ciklična kolebanja koja se mogu javiti u periodu od 2 do 3 godine, ali i u periodu od 8 do 10 godina. Ciklične varijacije nisu ujednačene zbog čega se njihovo ocenjivanje mora vršiti indirektno. Takođe, nemoguće je odabrati prosečan ciklus.

Kod vremenske serije koja je duga do godinu dana dominiraju trend i sezonska komponenta, pa je lakše izolovati cikličnu komponentu. S obzirom na to da se sezonska komponenta ispoljava u mesečnim i kvartalnim podacima, ali ne i kod godišnjih podataka, pojava sezonske komponente se ovde zanemaruje. Trend komponenta je prisutna i predstavlja tok koji bi pojava imala da nije bilo cikličnih varijacija. Eliminisanjem trenda iz vremenske serije mi identifikujemo ciklične varijacije. Smatra se da se neregularna kolebanja poništavaju u dugom vremenskom periodu.

Dakle, prema multiplikovanom modelu vremenske serije, cikličnu komponentu dobijamo upoređivanjem empirijskih podataka sa vrednostima trenda ((y/yt)*100).

Da bi smo utvrdili prisustvo ciklične komponente neophodno je da testiramo značajnost cikličnih varijacija. Testiranje se oslanja na primenu χ^2 testa. Najpre se određuje empirijski broj faza na osnovu odstupanja originalnih podataka od linije trenda ((y/yt)*100). Zatim se upoređuje empirijski broj faza dužine 1, 2, 3 i više godina sa teorijskim brojem faza koji se određuje po formulama:

$$f'_1 = \frac{5(n-3)}{12} \qquad f'_2 = \frac{11(n-4)}{60} \qquad f'_3 = \frac{4n-21}{60}.$$

Ispitivanje postojanja ciklične komponente ima smisla samo za vremenske serije koje su duže od 12 godina. Za vremensku seriju dužu od 12 godina (n>12) i α=0,05 kritična vrednost testa je $\chi_p{}^2 = 6{,}898$.

Postupak testiranja ima sledeće faze:

1. Definisanje hipoteza;

   Ho: Pojavu ne karakterišu ciklične varijacije

   H1: Pojavu karakterišu ciklične varijacije

2. Prema kriterijumu n>12 posmatrana pojava ispunjava uslov za testiranje i vrednost statistike testa iznosi $\chi^2_{0,05}=6{,}898$;

U narednom koraku definišemo pravila odlučivanja;

3. Ho se prihvata za $\chi^2 p < 6{,}898$
   H1 se prihvata za $\chi^2 p \geq 6{,}898$

U sledećem koraku izračunavamo vrednost za $\chi_p{}^2$;

4. $\chi^2 p = \sum \frac{(fi - fi')^2}{fi'}$

5. Donosimo odluku da li prihvatamo ili odbacujemo Ho hipotezu.

Ispitivanje postojanja ciklične varijacije **Primer 21.**

Na osnovu podataka o prilivima stranih direktnih investicija (SDI) u Republici Srbiji sa rizikom greške od 0,05 ispitajte postojanje cikličnih varijacija.

Tabela 21. Prilivi stranih direktnih investicija u milionima $ u Republici Srbiji

Godine	SDI u Srbiji	X	x*y	X^2	Yt	(y/yt)*100	Odstupanje od proseka (100%)
1992	126	-10	-1260	100	-298,51	-42,21	-
1993	96	-9	-864	81	-147,24	-65,20	-
1994	63	-8	-504	64	4,03	1563,28	+
1995	45	-7	-315	49	155,3	28,98	-
1996	0	-6	0	36	306,57	0,00	-
1997	740	-5	-3700	25	457,84	161,63	+
1998	113	-4	-452	16	609,11	18,55	-
1999	112	-3	-336	9	760,38	14,73	-
2000	52	-2	-104	4	911,65	5,70	-
2001	117	-1	-117	1	1062,92	11,01	-
2002	563	0	0	0	1214,19	46,37	-
2003	1516	1	1516	1	1365,46	111,02	+
2004	1024	2	2048	4	1516,73	67,51	-
2005	2078	3	6234	9	1668	124,58	+
2006	4878	4	19512	16	1819,27	268,13	+
2007	4373	5	21865	25	1970,54	221,92	+
2008	2955	6	17730	36	2121,81	139,27	+
2009	1959	7	13713	49	2273,08	86,18	-
2010	1329	8	10632	64	2424,35	54,82	-
2011	2709	9	24381	81	2575,62	105,18	+
2012	650	10	6500	100	2726,89	23,84	-
Σ	25498	0	116479	770	25497,99	-	/

Podaci preuzeti sa: United Nations Conference on Trade and Development, World Investment Report 2013/2012/2011/2010. http://www.unctad.org/en/PublicationsLibrary/wir2013_en.pdf; http://unctad.org/en/PublicationsLibrary/wir2012_embargoed_en.pdf; http://unctad.org/en/PublicationsLibrary/wir2011_en.pdf; http://www.unctad.org/en/Docs/wir2010_en.pdf., [09.03.2016. u 18:00]

Rešenje:

1. Ho: Pojavu ne karakterišu ciklične varijacije

   H1: Pojavu karakterišu ciklične varijacije

2. $\chi^2_{0,05}=6,898$

3. Ho se prihvata za $\chi^2 p < 6,898$

   H1 se prihvata za $\chi^2 p \geq 6,898$

4. $\chi^2 p = \sum \frac{(fi - fi')^2}{fi'}$

$$f'_1 = \frac{5(n-3)}{12} \qquad f'_2 = \frac{11(n-4)}{60} \qquad f'_3 = \frac{4n-21}{60}$$

$$f`_1 = \frac{5(n-3)}{12} = \frac{5(21-3)}{12} = \frac{5*18}{12} = \frac{90}{12} = 7,5$$

$$f`_2 = \frac{11(n-4)}{60} = \frac{11(21-4)}{60} = \frac{11*17}{60} = \frac{187}{60} = 3,12$$

$$f`_3 = \frac{4*n-21}{60} = \frac{4*21-21}{60} = \frac{84-21}{60} = \frac{63}{60} = 1,05$$

Trajanje faza u godinama	F	F'	f-f'	$(f\text{-}f')^2$	$(f\text{-}f')^2$ / f'
1	6	7,5	-1,5	2,25	0,30
2	3	3,12	-0,12	0,01	0,005
3 i više	2	1,05	0,95	0,90	0,86
Σ	-	-	-	-	1,16

χ^2_p=1,16<6,898 Ho se prihvata, posmatranu pojavu ne karakterišu ciklične varijacije.

PITANJA ZA DISKUSIJU

- ✓ Definišite vremensku seriju.
- ✓ Koji su osnovni ciljevi modeliranja i analize vremenske serije?
- ✓ Koji su parcijalni ciljevi modeliranja i analize vremenske serije?
- ✓ Objasnite stacionarne i nestacionarne vremenske serije.
- ✓ Nabrojte i ukratko objasnite komponente koje izazivaju varijacije vremenske serije.
- ✓ Šta je trend?
- ✓ Objasnite deterministički i stohastički trend.
- ✓ Kako određujemo dužinu perioda predviđanja posmatrane pojave?
- ✓ Koje su metode za ocenu adekvatnosti tipa funkcije trenda?
- ✓ Objasnite grafički metod.
- ✓ Objasnite metod polu proseka oslanjajući se na primer.
- ✓ Objasnite metod pokretnih proseka oslanjajući se na primer.
- ✓ Objasnite metod najmanjih kvadrata.
- ✓ Koji je najčešče korišćeni metod ocene adekvatnosti funkcije trenda?
- ✓ Objasnite metod diferencija i standardnu grešku trenda.
- ✓ Kako isključujemo uticaj trenda na vremensku seriju?
- ✓ Kada se primenjuje linearni trend?
- ✓ Koja pravila moraju biti ispunjena za primenu linearnog trenda?
- ✓ Kako određujemo vrednost nezavisne promenljive X?
- ✓ Objasnite postupak ekstrapolacije trenda.
- ✓ Kada se primenjuje parabolični trend?
- ✓ Kada se primenjuje eksponencijalni trend?
- ✓ Šta pokazuje eksponencijalna stopa rasta?
- ✓ Objasnite sezonsku komponentu vremenske serije.
- ✓ Kod kojih ekonomskih pojava se javljaju sezonske varijacije?
- ✓ Koji su metodi za izračunavanje sezonskih indeksa?
- ✓ Kada se primenjuje specifičan sezonski indeks, a kada tipičan sezonski indeks?
- ✓ Objasnite metodu odnosa prema pokretnim sredinama.
- ✓ Kako se vrši desezoniranje podataka vremenske serije?
- ✓ Kako se vrši predviđanje budućih vrednosti posmatrane pojave na bazi sezonskih indeksa?
- ✓ Objasnite cikličnu komponentu vremenske serije.
- ✓ Koji je postupak izolovanja sezonske komponente iz vremenske serije podataka?
- ✓ Objasnite postupak testiranja značajnosti cikličnih varijacija.

7.

DINAMIČKA ANALIZA VREMENSKIH SERIJA METODOM INDEKSNIH BROJEVA

POJAM, OSOBINE I PODELA INDEKSA
BAZNI I LANČANI INDEKSI
GEOMETRIJSKA STOPA RASTA
INDIVIDUALNI I GRUPNI INDEKSI

INDIVIDUALNI I GRUPNI INDEKSI CENE
INDIVIDUALNI I GRUPNI INDEKSI KOLIČINE
INDIVIDUALNI I GRUPNI INDEKSI ZARADA
INDIVIDUALNI I GRUPNI INDEKSI PRODUKTIVNOSTI RADA

INDEKSNI BROJEVI KAO METODA DINAMIČKE ANALIZE

Dinamičkom analizom posmatra se i prati kretanje masovne pojave kroz vreme i međusobno se upoređuju empirijski podaci posmatrane vremenske serije iz različitih vremenskih perioda kako bi se došlo do saznanja da li pojava tokom vremena ima pozitivne, ili negativne promene, ili se ne menja. Za dinamičku analizu koristi se više metoda: trend, vremenski i sezonski indeksi, srednji tempo rasta i slično.

Da bi analiza bila adekvatno sprovedena neophodno je da vremenska serija koja je predmet analize bude homogena, a posmatrana pojava definisana i merena na isti način tokom ukupnog perioda posmatranja njenog kretanja. Takođe, podaci moraju biti u istim vremenskim jedinicama kako bi se omogućila uporedivost.

Indeksni brojevi pokazuju samo relativne promene posmatrane pojave. Njima se upoređuje obim ili nivo dve ili više istorodnih pojava. Na osnovu njih nije moguće doći do zaključka o apsolutnim veličinama posmatrane pojave, kao ni da dve posmatrane pojave imaju istu apsolutnu vrednost ukoliko su im jednaki indeksni brojevi. Takođe, ukoliko je vrednost jednog indeksa veća od drugog to znači da je kod te pojave došlo do veće relativne promene u odnosu na drugu pojavu, a ne i da je apsolutna vrednost te pojave veća od apsolutne vrednosti druge posmatrane pojave.

U statističkoj praksi indeksni brojevi nalaze široku primenu. Na osnovu njih moguće je platiti kretanje cena i proizvodnje u industriji i poljoprivredi, praćenje produktivnosti rada na nivou privrednih grana, praćenje vrednosti spoljne trgovine, praćenje performansi berzanskog tržišta i slično.

Uz pomoć indeksa cena na malo moguće je odrediti stopu inflacije. Indeks troškova života je poseban vid indeksa cena na malo koji pokazuje procentualne promene cena na malo proizvoda i usluga lične potrošnje u odnosu na posebno određenu listu tih proizvoda difinisanu od strane statističkih službi.

OSOBINE I PODELA INDEKSA

Indeksni brojevi ispoljavaju osobine kao što je *identičnost, homogenost, proporcionalnost i reverzibilnost.*

Uslov *identičnosti* iziskuje da odnos vrednosti posmatranog perioda Σyi prema vrednostima iz baznog perioda Σyo bude jednak 1. Kada su date vrednosti obračunate u drugim jedinicama mere i stave se u odnos indeks ostaje nepromenjen. Time je ispunjen uslov *homogenosti*. Prema uslovu *proporcionalnosti* indeks posmatranog perioda jednak je faktoru kada se vrednosti *yi* izjednačuju sa proizvodom tog faktora i odgovarajućim vrednostima *yo*. Uslov *reverzibilnosti* je ispunjen kada je izračunati indeks jednak recipročnoj vrednosti indeksa koji uzima obrnuti odnos vrednosti. Kod individualnih indeksa ovaj uslov je zadovoljen, dok se kod grupnih indeksa mogu javiti razlike.

Ukoliko se izračunavanje vrši na osnovu jedne vremenske serije, govori se o *individualnim* vremenskim indeksima. Oni mogu biti *bazni* i *lančani*. Bazni indeksi imaju stalnu bazu dok se kod lančanih indeksa baza menja. *Grupni* indeksi se izračunavaju na osnovu dve ili više vremenskih serija. Oni se mogu izračunati sa *ponderima* iz *tekućeg* perioda i sa ponderima iz *baznog* perioda. Ponderi mogu biti cena, količina, vrednost i to iz baznog i tekućeg perioda, a ponderisanje grupnih indeksa je neophodno kako bi se svim vremenskim serijama dao isti značaj.

U statistici se koriste dve metode za izračunavanje grupnih indeksa*: metod srednjih vrednosti i metod agregata.* Metod agregata obično se koristi kada su u vremenskim serijama poznate cene i količine, dok se metod srednjih vrednosti primenjuje kada su poznate vrednosti.

U zavisnosti od toga na koju se ekonomsku veličinu odnose indeksi se dele u tri grupe:

- Indekse cena,
- Indekse količina ili fizičkog obima i
- Indekse vrednosti.

Na bazi ovih indeksa izvedeni su: indeks troškova života kao poseban vid indeksa cena na malo, indeksi produktivnosti, indeksi nominalnih i realnih zarada, indeksi izvoza i uvoza i slično.

Bazni i lančani indeksi

Za adekvatno određenje ovog indeksa značajno je pravilno odrediti bazni period. Bazni period treba da bude onaj vremenski period u kojem je bila stabilna pojava u normalnim granicama (stabilni uslovi proizvodnje, niska inflacija i slično).

Vremenski period u odnosu na koji se vrši poređenje uzima se kao bazni period i njegova vrednost nalazi se u imeniocu izraza za izračunavanje indeksnih brojeva, dok se vrednost posmatrane pojave vremenskog perioda koji se upoređuje nalazi u brojiocu tog izraza. Vrednost indeksnog broja pokazuje da li je veličina koja se upoređuje viša ili niža od bazne veličine i za koliko procenata. Bazni indeks se izračunava na osnovu sledeće formule:

$$Ii = \frac{yi}{yo} * 100\% \qquad i= 1,2,3,\ldots, n,$$

gde je *n* broj podataka vremenske serije, *yi* (i = 1, 2, 3, ..., n) vremenska serija čije pojedinačne vrednosti mogu ići od 1 do n, a za baznu vrednost može biti uzeta bilo koja vrednost od njih koja će pri tom biti označena kao *yo*.

Izračunavanje baznih indeksa **Primer 22.**

Prema podacima o proizvodnji u tekstilnom preduzeću datih u tabeli koja sledi izračunajte bazne indekse. Bazna godina je 2009. godina.

Godine (x)	2009.	2010.	2011.	2012.	2013.	2014.	2015.
Proizvodnja u 000 (y)	2860	2990	3400	3201	3109	3270	4000

Rešenje:

Godine	**Proizvodnja**	**Bazni indeksi (2009.=100%)** $Ii = \frac{yi}{yo} * 100\%$
2009.	2860	100
2010.	2990	104,55
2011.	3400	118,88
2012.	3201	111,92
2013.	3109	108,71
2014.	3270	114,34
2015.	4000	139,86

Odgovor: Proizvodnja u tekstilnom preduzeću veća je u 2010. godini u odnosu na 2009. za 4,55%; u 2011. za 18,88%; u 2012. za 11,92%; u 2013. za 8,71%; u 2014. za 14,34% i u 2015. za 39,86% u odnosu na baznu godinu.

Često se je, iz praktičnih razloga, neophodno prethodno izračunate bazne indekse preračunati na bazne indekse sa novom bazom. To je izvodljivo pomoću sledeće formule:

$$Ii' = \frac{Ii}{Io} * 100\%, \quad i=1, 2, 3, ..., n,$$

gde je *Ii'* bazni indeks sa novom nepromenljivom bazom, *Ii* indeks sa stalnom bazom koji je već ranije izračunat i *Io* indeks novouvedene baze.

Izračunavanje preračunatih baznih indeksa **Primer 23.**

Prema podacima o baznim indeksima preračunajte te bazne indekse na novu bazu. Bazna godina je 2011. godina.

Rešenje:

Godine	Proizvodnja	Bazni indeksi (2009.=100%) $Ii = \frac{yi}{yo} * 100\%$	Preračunati bazni indeksi (2011.=100%) $Ii' = \frac{Ii}{Io} * 100\%$
2009	2860	100	84,12
2010	2990	104,55	87,94
2011	3400	118,88	100,00
2012	3201	111,92	94,15
2013	3109	108,71	91,44
2014	3270	114,34	96,18
2015	4000	139,86	117,65

Odgovor: proizvodnja u tekstilnom preduzeću u odnosu na 2011. godinu bila je za 15,88% manja u 2009. godini, za 12,06% manja u 2010. godini, manja za 5,85% u 2012. godini, manja za 8,56%, i u 2013, u 2014. manja za 3,82%, dok je u 2015. godini bila veća za 17,65%.

Za razliku od baznih indeksa gde se indeksni brojevi izračunavaju stavljanjem podataka u odnos sa stalnom bazom, kod lančanih indeksa za vrednost baze uvek se uzima podatak iz prethodnog perioda. *Lančani ili verižni indeksi* izračunavaju se na sledeći način:

$$Vi = \frac{yi}{yi-1} * 100\% \quad i=1,2,3,..,n,$$

gde je *yi* tekući period, a *yi-1* prethodni period.

Lančani indeksi pokazuju procentualnu promenu posmatrane pojave iz perioda u period i mogu amortizovati trend ukoliko se iz perioda u period poveća baza upoređenja.

Izračunavanje lančanih indeksa **Primer 24.**

Na osnovu podataka iz prethodnog primera izračunajte lančane indekse.

Rešenje:

Godine	Proizvodnja (y)	Lančani indeksi $V_i = \frac{y_i}{y_{i-1}} * 100\%$
2009	2860	-
2010	2990	104,55
2011	3400	113,71
2012	3201	94,15
2013	3109	97,13
2014	3270	105,18
2015	4000	122,32

Odgovor: Proizvodnja u 2010. veća je za 4,55% u odnosu na 2009. godinu; 2011. veća za 13,71% u odnosu na 2010.; 2012. manja za 5,85% u odnosu na 2011; u 2013. manja za 2,87% u odnosu na 2012; 2014. veća za 5,18% u odnosu na 2013, dok je u 2015. veća za 22,32% u odnosu na 2014. godinu.

Često se u statističkoj analizi vrši preračunavanje lančanih indeksa u bazne indekse sa bazom koja nam je potrebna. Da bi se izvršio ovaj obračun koriste se sledeće formule:

- Za godine koje slede posle bazne godine lančani indeksi se preračunavaju na bazne na osnovu izraza:

$$I_i = \frac{I_{i-1} * V_i}{100}, \quad i=1,2,3,...,n.$$

- Za godine koje prethode bazičnoj godini koristi se izraz:

$$I_{i-1} = \frac{I_i}{V_i} * 100\% \quad i=1,2,3,...,n.$$

Preračunavanje lančanih indeksa na bazne indekse **Primer 25.**

Na osnovu podataka iz prethodnog primera preračunajte lančane indekse na bazne indekse sa bazom u 2011. godini.

Rešenje:

Godine	Proizvodnja	Preračunati bazni indeksi	Preračunati lančani indeksi u bazne (2011.=100%)
2009	84,12	-	I'_2/V_2 =91,94
2010	87,94	104,55	I'_3/V_3 =113,71
2011	100,00	113,71	100
2012	94,15	94,15	I'_3/V_4 =94,15
2013	91,44	97,13	I'_4/V_5 =91,44
2014	96,18	105,18	I'_5/V_6 =96,18
2015	117,65	122,32	I'_6/V_7 =117,65

Geometrijska stopa rasta

Geometrijska stopa porasta pokazuje prosečno povećanje ili smanjenje pojave u posmatranom vremenskom periodu. Njeno izračunavanje moguće je na dva načina:

- na osnovu lančanih indeksa i
- na osnovu empirijskih podataka.

Na osnovu lančanih indeksa, a uz pomoć *geometrijske sredine* koja predstavlja srednji tempo rasta i računa se na sledeći način:

$$G = \sqrt[N]{I_1^L * I_2^L * \dots * I_N^L}$$

geometrijska stopa rasta se izračunava kada od srednjeg tempa rasta oduzmemo 100:

$$r_g = G - 100\%.$$

Na osnovu empirijskih podataka geometrijska stopa rasta se izračunava na sledeći način:

$$r_g = \left(\sqrt[N-1]{\frac{y_N}{y_1}} - 1\right) * 100\%$$

,

gde je y_1 prvi, a y_N poslednji podatak posmatrane vremenske serije.

Izračunavanje geometrijske stope rasta **Primer 26.**

Na osnovu podataka iz naredne tabele izračunajte geometrijsku stopu rasta, a potom i originalne podatke vremenske serije ukoliko je vrednost posmatrane pojave u 2010. godini bila 130 miliona dinara.

Godina	2010.	2011.	2012.	2013.	2014.	2015.
Lančani indeks (L)	-	120	115	119	125	128

Rešenje:

Godine	Lančani indeksi (L)	y	Log (L)
2010	-	130	-
2011	120	156	2,0792
2012	115	179,40	2,0607
2013	119	213,49	2,0755
2014	125	266,86	2,0969
2015	128	341,58	2,1072
Σ	-	-	10,4195

$$L_i = \frac{y_i}{y_{i-1}} * 100 \quad y_i = \frac{y_{i-1} * L_i}{100} = \frac{130*120}{100} = \frac{15600}{100} = 156$$

$$G = \mathrm{N}\frac{\sum logL}{n} = \mathrm{N}\frac{10,4195}{5} = \mathrm{N}\,2,0839 = 121,31$$

rg = G-100% = 121,31-100=21,31%

$$r_g = \left(\sqrt[N-1]{\frac{y_N}{y_1}} - 1\right) * 100\% = \left(\sqrt[6-1]{\frac{341,58}{130}} - 1\right) * 100\%$$

$$r_g = \left(\sqrt[5]{2,63} - 1\right) * 100\% = \left(\frac{1}{5} log 2,63 - 1\right) = \left(\frac{0,41996}{5} - 1\right)*100\%$$

$$r_g = (0,083992-1)*100\%$$

$$r_g = (\mathrm{N}\,1,213366 - 1) * 100 = 0,2134 * 100 = 21,34\%$$

Odgovor: Prosečna stopa porasta posmatrane serije podataka iz perioda u period iznosi 21,34%.

Indeksi količine

Indeksi količine (fizičkog obima) predstavljaju pokazatelje relativnih promena u fizičkom obimu proizvodnje, prodaje, uvoza i izvoza i slično u posmatranom periodu u odnosu na bazni period. Kao bazni period treba odabrati period završetka jedne prethodne faze ili period početka nove faze u razvoju posmatrane pojave. Indeksi fizičkog obima mogu biti *individualni* i *grupni*, a izračunavanje grupnih indeksa može biti *metodom agregata* i *metodom srednjih vrednosti*.

Individualni i grupni indeksi količine

Individualni indeksi količine pokazuju relativne promene u fizičkom obimu proizvodnje samo jednog proizvoda posmatranog perioda u odnosu na bazni period. Izračunavaju se uz pomoć sledećeg obrasca:

$$Iq = \frac{q_i}{q_0} * 100\% \qquad i=1,2,3,...,n,$$

gde je q_i količina u tekućem periodu, q_0 količina u baznom periodu, a Iq individualni indeks fizičkog obima.

Izračunavanje individualnih indeksa količine **Primer 27.**

Na osnovu podataka o obimu proizvodnje i cenama po proizvodima jednog preduzeća za 2014. i 2015. godinu izračunajte individualne indekse količine.

Proizvod	2014		2015	
	Qo	qi	po	pi
A	120	135	4	7
B	145	130	6	5
C	190	200	8	9

Rešenje:

Proizvod	**2014**		**2015**		$Iq = \frac{q_i}{q_0} * 100\%$
	qo	Qi	po	pi	
A	120	135	4	7	113%
B	145	130	6	5	90%
C	190	200	8	9	105%

Odgovor: Individualni indeksi količine pokazuju rast za proizvod A i C u tekućem u odnosu na bazni period, dok je kod proizvoda B došlo do pada u tekućem u odnosu na bazni period.

Grupni indeksi količine pokazuju relativne promene u fizičkom obimu proizvodnje za više proizvoda u tekućem periodu u odnosu na bazni period.

Mogu se izračunati uz pomoć dve metode:

- metoda agregata i
- metoda srednjih vrednosti.

Ponder koji se koristi za obračun grupnih indeksa količine može biti cena iz baznog i cena iz tekućeg perioda.

Metodom agregata sa ponderom iz baznog perioda Laspejresov indeks fizičkog obima prometa računa se na sledeći način:

$$oIq=\frac{\sum qipo}{\sum qopo} * 100\%, \quad i=1,2,3,...,n,$$

gde je q_i količina u tekućem periodu, q_0 količina u baznom periodu, p_0 cena u baznom periodu, a oIq grupni indeks fizičkog obima sa ponderom iz baznog perioda.

Metodom agregata sa ponderom iz tekućeg perioda Pašeov indeks fizičkog obima prometa računa se na sledeći način:

$$iIq=\frac{\sum qipi}{\sum qopi} * 100\%, \quad i=1,2,3,...,n,$$

gde je q_i količina u tekućem periodu, q_0 količina u baznom periodu, p_i cena u tekućem periodu, a oIq grupni indeks fizičkog obima sa ponderom iz tekućeg perioda.

Metodom srednjih vrednosti sa ponderom iz baznog perioda indeks fizičkog obima prometa računa se na sledeći način:

$$oIq=\frac{\sum \frac{qi}{qo} qopo}{\sum qopo} *100\%.$$

Metodom srednjih vrednosti sa ponderom iz tekućeg perioda indeks fizičkog obima prometa računa se na sledeći način:

$$iIq=\frac{\sum qipi}{\sum \frac{qo}{q1} qipi} *100\%.$$

S obzirom na to da grupni indeksi količine sa ponderima iz baznog i tekućeg perioda najčešće nemaju istu vrednost razlika se ublažava primenom Fišerovog idealnog indeksa količine:

$$_fI_q = \sqrt{_oI_q * _iI_q}$$

Izračunavanje grupnih indeksa količine **Primer 28.**

Na osnovu podataka o obimu proizvodnje i cenama iz prethodnog primera izračunajte grupne indekse količine i Fišerov idealni indeks količine.

Rešenje:

Proizvodi	q_0	q_i	p_0	p_i	qopo	qipi	qopi	qipo
A	120	135	4	7	480	945	840	540
B	145	130	6	5	870	650	725	780
C	190	200	8	9	1520	1800	1710	1600
Σ	-	-	-	-	2870	3395	3275	2920

Sa ponderom iz baznog perioda – metod agregata:

$$_oI_q = \frac{\sum qipo}{\sum qopo} * 100\% = \frac{2920}{2870} * 100 = 101{,}74\%$$

Sa ponderom iz tekućeg perioda – metod agregata:

$$_iI_q = \frac{\sum qipi}{\sum qopi} * 100\% = \frac{3395}{3275} * 100 = 103{,}66\%$$

$$_fI_q = \sqrt{_oI_q * _iI_q} = \sqrt{1{,}0174 * 1{,}0366} * 100 = \sqrt{1{,}0546} * 100 = 102{,}69\%$$

Odgovor: U preduzeću je došlo do porasta fizičkog obima proizvodnje u tekućem u odnosu na bazni period za 1,74% i 3,66%. Na osnovu Fišerovog idealnog indeksa količine došlo je do porasta fizičkog obima proizvodnje u tekućem u odnosu na bazni period za 2,69%.

Indeksi cene

Indeksi cene predstavljaju pokazatelje relativnih promena cena u posmatranom periodu u odnosu na bazni period. Na osnovu informacija koje pružaju indeksi cena neophodno je predvideti tendencije promena cena i izmeriti ih. Zbog toga je značajno imati informacije o cenama svih kupoprodajnih transakcija.

Indeksi cena mogu biti *individualni* i *grupni*, a izračunavanje grupnih indeksa može biti *metodom agregata* i *metodom srednjih vrednosti*.

Individualni i grupni indeksi cene

Individualni indeksi cene pokazuju relativne promene cena samo jednog proizvoda u tekućem u odnosu na bazni period. Izračunavaju se uz pomoć sledećeg obrasca:

$$Ip=\frac{pi}{po}*100\%, \quad i=1,2,3,...,n,$$

gde je p_i cena u tekućem periodu, p_0 cena u baznom periodu, a Ip individualni indeks cena.

Izračunavanje individualnih indeksa cene **Primer 29.**

Na osnovu podataka o obimu proizvodnje i cenama iz prethodnog primera izračunajte individualne indekse cene.

Rešenje:

Proizvodi	q_0	q_i	p_0	p_i	$Ip=\frac{pi}{po}*100\%$
A	120	135	4	7	175,00
B	145	130	6	5	83,33
C	190	200	8	9	112,50

Odgovor: Individualni indeksi cene pokazuju rast cena za proizvod A i C u tekućem u odnosu na bazni period, dok je kod proizvoda B došlo do pada u tekućem u odnosu na bazni period.

Grupni indeksi cene pokazuju relativne promene cena za više proizvoda u tekućem periodu u odnosu na bazni period.

Mogu se izračunati uz pomoć dve metode:

- metoda agregata i
- metoda srednjih vrednosti.

Ponder koji se koristi za obračun grupnih indeksa cene može biti količina iz baznog i količina iz tekućeg perioda.

Metodom agregata sa ponderom iz baznog perioda Laspejresov indeks cene računa se na sledeći način:

$$oIp = \frac{\sum piqo}{\sum poqo} * 100\%, \quad i=1,2,3,...,n,$$

gde je p_i cena u tekućem periodu, p_0 cena u baznom periodu, q_0 količina u baznom periodu, a oIp grupni indeks cena sa ponderom iz baznog perioda.

Metodom agregata sa ponderom iz tekućeg perioda Pašeov indeks cene računa se na sledeći način:

$$iIp = \frac{\sum piqi}{\sum poqi} * 100\%, \quad i=1,2,3,...,n,$$

gde je p_i cena u tekućem periodu, p_0 cena u baznom periodu, q_i količina u tekućem periodu, a iIp grupni indeks cena sa ponderom iz tekućeg perioda.

Metodom srednjih vrednosti sa ponderom iz baznog perioda indeks cena računa se na sledeći način:

$$oIp = \frac{\sum \frac{pi}{po} qopo}{\sum qopo} * 100\%.$$

Metodom srednjih vrednosti sa ponderom iz tekućeg perioda indeks cena računa se na sledeći način:

$$iIp = \frac{\sum qipi}{\sum \frac{po}{p1} qipi} * 100\%.$$

S obzirom na to da grupni indeksi cene sa ponderima iz baznog i tekućeg perioda najčešće nemaju istu vrednost razlika se ublažava primenom Fišerovog idealnog indeksa cene:

$$_f I_p = \sqrt{oIp * iIp}.$$

Izračunavanje grupnih indeksa cene **Primer30.**

Na osnovu podataka o obimu proizvodnje i cenama iz prethodnog primera izračunajte grupne indekse cene i Fišerov idealni indeks cene.

Rešenje:

Proizvodi	q_0	q_i	p_0	p_i	qopo	qipi	piqo	poqi
A	120	135	4	7	480	945	840	540
B	145	130	6	5	870	650	725	780
C	190	200	8	9	1520	1800	1710	1600
Σ	-	-	-	-	2870	3395	3275	2920

Sa ponderom iz baznog perioda – metod agregata:

$$oIp=\frac{\Sigma piqo}{\Sigma poqo}*100\%=\frac{3275}{2870}*100\%=114{,}11\%$$

Sa ponderom iz tekućeg perioda – metod agregata:

$$iIp=\frac{\Sigma piqi}{\Sigma poqi}*100\%=\frac{3395}{2920}*100\%=116{,}27\%$$

$$_fIp=\sqrt{oIp*iIp}=\sqrt{1{,}1411*1{,}1627}*100\%=\sqrt{1{,}3268}*100\%=132{,}68\%$$

Odgovor: U preduzeću je došlo do porasta cena u tekućem u odnosu na bazni period za 4,11% i 16,27%. Na osnovu Fišerovog idealnog indeksa količine došlo je do porasta cena u tekućem u odnosu na bazni period za 32,68%.

Izračunavanje grupnih indeksa cene metodom srednjih vrednosti **Primer 31.**

Na osnovu podataka o obimu proizvodnje i cenama iz prethodnog primera izračunajte grupne indekse cene metodom srednjih vrednosti.

Rešenje:

Proiz.	qo	qi	po	pi	qopo	qipi	$\frac{pi}{po}$	$\frac{pi}{po}qopo$	$\frac{po}{p1}qipi$
A	120	135	4	7	480	945	1,75	840,00	540,00
B	145	130	6	5	870	650	0,83	725,00	780,00
C	190	200	8	9	1520	1800	1,13	1710,00	1600,00
Σ					2870	3395		3275	2920,00

Sa ponderom iz baznog perioda – metod srednjih vrednosti:

$$oIp=\frac{\Sigma\frac{pi}{po}qopo}{\Sigma qopo}*100\%=\frac{3275}{2870}*100=114{,}11\%$$

Sa ponderom iz tekućeg perioda – metod srednjih vrednosti:

$$iIp=\frac{\sum qipi}{\sum \frac{po}{p1} qipi}*100\%=\frac{3395}{2920}*100=116{,}27\%$$

Odgovor: U preduzeću je došlo do porasta cena u tekućem u odnosu na bazni period za 4,11% i 16,27%.

Indeks troškova života

Indeks troškova života je „poseban vid indeksa cena na malo, jer pokazuje relativne promene cena samo određene grupe proizvoda i usluga koje služe za podmirenje osnovnih životnih potreba."[75]

Da bi se odredio indeks troškova života neophodno je precizno utvrditi *tipski budžet*, kao i *sastav porodice* za koju će se određivati pomenuti indeks. Za određivanje indeksa troškova života uzima se sastav porodice od četiri člana: otac, majka i dva deteta. Tipski budžet treba da sadrži listu proizvoda i usluga sa neophodnim količinama za podmirivanje osnovnih životnih potreba. Količine sadržane u tipskom budžetu neophodne su kao ponderi za izračunavanje ovog indeksa.

Jedan vid tipskog budžeta je t*eorijski budžet. Teorijski budžet* se formira na osnovu naučnih zahteva fiziologije za obezbeđenje reprodukcije radne snage. On se formira na osnovu naučno utvrđenih fizioloških potreba u ishrani svakog čoveka izraženih u džulima. Najčešće se tipski budžet određuje metodom *porodičnih dudžeta* gde se struktura potrošnje formira na osnovu stvarne potrošnje četvoročlane porodice. *Anketiranjem porodica* o njihovoj stvarnoj potrošnji tipski budžet ima realnu podlogu. Nedostatak ovog metoda je u tome što stvarna potrošnja može biti ispod nivoa zadovoljenja osnovnih potreba stanovništva i onda se troškovi prate na bazi nedovoljnog budžeta. Drugi način utvrđivanja tipskog budžeta je na osnovu *metoda globalne potrošnje*. Nedostatak ovog metoda je u tome što obuhvata potrošnju porodica koje pripadaju svim slojevima stanovništva, pa prosek potrošnje po stanovniku ne pruža realnu sliku o pravoj strukturi potrošnje.

Statistička praksa koristi tipski budžet koji sadrži: ishranu, duvan i piće, odeću i obuću, ogrev i osvetljenje, pokućanstvo, stan, usluge i kulturne potrebe.

Indeks troškova života računa se na sledeći način:

[75] Stojković, M., 1995. Statistika za menadžere, Ekonomski fakultet u Subotici, Subotica, str. 467.

$$Ip=\frac{\sum piq}{\sum poq}*100\%, \quad i=1,2,3,...,n,$$

gde je q količina proizvoda koji se posmatraju, p_i cena u tekućem periodu, p_o cena u baznom periodu, a Ip indeks troškova života.

Izračunavanje indeksa troškova života **Primer 32.**

Na osnovu podataka o količini pojedinih proizvoda i cenama izračunajte indeks troškova života.

Rešenje:

Proizvodi	q u 000	Cena u 2014.	Cena u 2015.	poq	piq
Meso	100	300	450	30000	45000
Mleko	60	45	55	2700	3300
El. Energija	3	142	150	426	450
Voda	0,2	72	60	14,4	12
Hleb	5			33140,4	48762

Rešenje:

$$Ip=\frac{\sum piq}{\sum poq}*100\%=\frac{48762}{33140,4}*100=147,14\%$$

Odgovor: Došlo je do porasta troškova života u tekućem u odnosu na bazni period za 47,14%.

Indeksi vrednosti

Individualni indeks vrednosti pokazuje relativne promene vrednosti jednog proizvoda u tekućem u odnosu na bazni period.

Individualni indeks vrednosti računa se na sledeći način:

$$Iqp=\frac{piqi}{poqo}*100\%.$$

Grupni indeks vrednosti pokazuje relativne promene vrednosti više proizvoda u tekućem u odnosu na bazni period.

Grupni indeks vrednosti računa se na sledeći način:

$$Ipq = \frac{\sum piqi}{\sum poqo} * 100\%$$

Izračunavanje indeksa vrednosti **Primer 33.**

Na osnovu podataka o obimu proizvodnje i cenama iz primera koji je obrađen u okviru indeksa cena izračunajte individualne i grupne indekse vrednosti.

Rešenje:

Proiz.	qo	qi	po	pi	qopo	qipi	$\frac{piqi}{poqo}$
A	120	135	4	7	480	945	196,88%
B	145	130	6	5	870	650	74,71%
C	190	200	8	9	1520	1800	118,42%
Σ					2870	3395	118,29%

$$Ipq = \frac{\sum piqi}{\sum poqo} * 100\% = \frac{3395}{2870} * 100\% = 118{,}29\%$$

Odgovor: U preduzeću je došlo do porasta vrednosti u tekućem u odnosu na bazni period za 18,29%.

Indeksi zarada

Indeksi zarada mogu biti individualni i grupni.

Individualni indeksi zarada pokazuju relativne promene zarada samo jedne kategorije radnika u posmatranom u odnosu na bazni period. Izračunavaju se uz pomoć sledećeg obrasca:

$$Ipe(z) = \frac{\overline{x_i}}{\overline{x_o}} * 100\%, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

gde je *i* tekući period, *o* bazni period, $\overline{x_i}$ prosečna zarada jedne kategorije radnika u tekućem periodu, a $\overline{x_o}$ prosečna zarada jedne kategorije radnika u baznom periodu.

Prosečna plata jedne kategorije radnika računa se na sledeći način:

- za bazni period:

$$\overline{xo} = \frac{xo}{Ro},$$

gde je x_o plata u baznom periodu, a *Ro* broj radnika u baznom periodu;

- za tekući period:

$$\overline{xi} = \frac{xi}{Ri},$$

gde je x_i plata u tekućem periodu, a *Ri* broj radnika u tekućem periodu.

Grupni indeksi zarada pokazuju relativne promene zarada više kategorija radnika u posmatranom u odnosu na bazni period. Razlikujemo *grupne indekse zarada sa promenljivim sastavom proizvodnje* i *nepromenljivim (postojanim) sastavom proizvodnje.*

Grupni indeks zarada sa *promenljivim sastavom proizvodnje* računa se uz pomoće sledećeg obrasca:

$$Ipe(z) = \frac{\Sigma \overline{xi}}{\Sigma \overline{xo}} * 100\%.$$

Ovaj indeks predstavlja procentualni odnos prosečne zarade po zaposlenom u tekućem periodu u odnosu na procentualni odnos prosečne zarade po zaposlenom u baznom periodu.

Grupni indeks zarada sa *nepromenljivim sastavom proizvodnje* sa *ponderom iz tekućeg perioda* računa se uz pomoć sledećeg obrasca:

$$_{i}I'pe(z) = \frac{\Sigma Ipe(z) * Ri}{\Sigma Ri} * 100\%.$$

Grupni indeks zarada sa *nepromenljivim sastavom proizvodnje* sa *ponderom iz baznog perioda* računa se uz pomoć sledećeg obrasca:

$$_{o}I'pe(z) = \frac{\Sigma Ipe(z) * Ro}{\Sigma Ro} * 100\%.$$

Da bismo izmerili uticaj promene u strukturi zaposlenih radnika na povećanje opšte prosečne vrednosti zarada po jednom zaposlenom radniku koristimo sledeći obrazac:

$$\frac{Ipe(z)}{I'pe(z)} * 100\%.$$

Dakle, stavlja se u odnos indeks zarada sa promenljivim i nepromenljivim sastavom proizvodnje pri čemu se koristi željeni ponder.

Sve navedene formule koriste se za obračun procentualnih promena nominalnih zarada. Za izračunavanje indeksa realnih zarada neophodno je imati podatke i ondeksu troškova života. *Indeks realnih zarada* dobija se kada se indeks nominalnih zarada stavi u odnos sa indeksom troškova života.

Izračunavanje indeksa zarada **Primer 34.**

Na osnovu podataka o broju zaposlenih i njihovim zaradama tadih u tabeli izračunajte (baza = 2014. godina):

a) Individualne indekse zarada po pojedinim kategorijama zaposlenih.

b) Grupni indeks nominalnih zarada promenljivog sastava zaposlenih.

v) Grupni indeks nominalnih zarada nepromenljivog sastava zaposlenih sa ponderom iz tekućeg perioda.

Stručna sprema	Broj zaposlenih		Ukupan iznos isplaćenih mesečnih zarada (000 din)	
	2014.	2015.	2014.	2015.
Visoka	9	7	370	400
Viša	23	30	635	632
Srednja	35	40	790	810

Rešenje:

Str. spr.	Ro	Ri	x_o	x_i	$\overline{x_o}$	$\overline{x_i}$	Ipe(z)	Ipe(z)*Ri
Visoka	**9**	**7**	**370**	**400**	41,11	57,14	139,00	9,73
Viša	**23**	30	635	632	27,61	21,07	76,30	22,89
Srednja	**35**	40	790	810	22,57	20,25	89,72	35,89
∑	67	77	1795	1842	91,29	98,46	107,85	83,05

a) $$Ipe(z) = \frac{\Sigma \overline{xi}}{\Sigma \overline{xo}} * 100\% = \frac{98,46}{91,29} * 100\% = 107,85\%$$

Odgovor: Došlo je do porasta zarada kod radnika visoke spreme za 39% u tekućem periodu u odnosu na bazni period. Kod radnika sa višom spremom došlo je do pada za 23,7%, a sa srednjom spremom za10,28%. U ukupnom obimu plate su porasle u odnosu na bazni period za 7,85%.

b) $$_i \overset{|}{I}pe(z) = \frac{\Sigma Ipe(z) * Ri}{\Sigma Ri} * 100\% = \frac{83,05}{77} * 100 = 107,86\%$$

Odgovor: Došlo je do porasta plata u odnosu na bazni period za 7,86% na osnovu indeksa sa nepromenljivim sastavom proizvodnje.

$$\frac{Ipe(z)}{I'pe(z)}*100\%=\frac{107,85}{107,86}*100\%=0,99*100=99\%$$

Odgovor: Promene u strukturi zaposlenih radnika uticale su na smanjenje opšte prosečne vrednosti zarada po zaposlenom radniku za 1%.

Pojam indeksa produktivnosti rada

Produktivnost predstavlja meru uspešnosti poslovanja u odnosu na raspoložive resurse. Ona predstavlja prosečan radni učinak. Produktivnost se može izraziti preko pravih i recipročnih pokazatelja.

Pravi pokazatelj produktivnosti rada izračunava se pomoću sledećeg obrasca:

$$Pr=\frac{q}{T},$$

gde je q količina ostvarene proizvodnje, a T utrošeno vreme za obavljanje konkretne proizvodnje.

Ovaj pokazatelj dobija se iz odnosa ostvarene proizvodnje i utrošenog vremena za proizvodnju. On pokazuje i prosečnu proizvodnju po jednom radniku.

Recipročni pokazatelj produktivnosti rada pokazuje prosečno utrošeno vreme po jedinici ostvarene proizvodnje. On se obračunava pomoću sledećeg obrasca:

$$Pr=\frac{T}{q}=\frac{1}{Pr}.$$

Indeksi produktivnosti rada pokazuju relativne promene produktivnosti rada u posmatranom periodu u odnosu na bazni period. Razlikujemo individualne i grupne indekse produktivnosti rada. Produktivnost se povećala ukoliko je vrednost dobijena indeksom manja od 100%.

Informacija o povećanju produktivnosti rada je korisna jer otkriva mogućnost povećanja proizvodnje sa postojećim brojem radnika. Međutim, postoje određena ograničenja statistike u ovoj oblasti. Činjenica je da produktivnost može da raste i kada su prisutni negativni elementi rentabilnosti poslovanja. Kao negativni element rentabilnosti poslovanja javlja se povećano trošenje materijala i sredstava za rad po jedinici proizvoda kao posledica njihovog neracionalnog trošenja zbog toga što je cilj povećati proizvodnju po svaku cenu. Takođe, merenjem produktivnosti rada na osnovu količine proizvoda nemamo uvid u kvalitet proizvoda. Indeks produktivnosti rada ne otkriva da li je pozitivan rezultat produktivnosti posledica povećanog trošenja njihove energije.

Individualni indeksi produktivnosti rada (indeksi dinamike produktivnosti rada) pokazuju relativne promene produktivnosti rada po pojedinim kategorijama u posmatranom u odnosu na bazni period. Pravi individualni indeks produktivnosti rada izračunava se na sledeći način:

$$Ipr = \frac{qi}{Ti} : \frac{qo}{To} * 100\%, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Ukoliko je vrednost ovog indeksa veća od 100% došlo je do porasta produktivnosti rada.

Recipročni individualni indeks produktivnosti rada izračunava se na sledeći način:

$$I\dot{p}r = \frac{Ti}{qi} : \frac{To}{qo} * 100\%, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Ukoliko je vrednost ovog indeksa veća od 100% došlo je do pada produktivnosti rada i obrnuto.

Izračunavanje indeksa produktivnosti rada **Primer 35.**

Na osnovu podataka iz sledeće tabele izračunajte individualne indekse produktivnosti rada.

Proizvodi	Qo (2014)	Qi (2015)	To (2014)	Ti (2015)
A	30	40	40	45
B	40	25	50	45
C	45	50	80	75

Rešenje:

Proizvodi	qo	qi	To	Ti	Qi/Ti	Qo/To	Ti/qi	To/qo
A	30	40	40	45	0,89	0,75	1,13	1,33
B	40	25	50	45	0,56	0,80	1,80	1,25
C	45	50	80	75	0,67	0,56	1,50	1,78

Ove formule primenjujemo po proizvodima: $Ipr = \frac{qi}{Ti} : \frac{qo}{To}$ i $I\dot{p}r = \frac{Ti}{qi} : \frac{To}{qo}$.

Ipr(A) = 0,89 / 0,75 *100% = 118,52%

Ipr(B) = 0,56 / 0,80 * 100% = 69,44%

Ipr(C) = 0,67 / 0,56 *100% = 118,52%

$$I'pr(A) = 1{,}13 / 1{,}33 * 100\% = 84{,}38\%$$

$$I'pr(A) = 1{,}80 / 1{,}25 * 100\% = 144\%$$

$$I'pr(A) = 1{,}50 / 1{,}78 * 100\% = 84{,}38\%$$

Grupni indeks produktivnosti rada pokazuje relativne promene produktivnosti rada kod više proizvoda u posmatranom u odnosu na bazni period. Razlikujemo grupne indekse produktivnosti rada promenljivog sastava proizvodnje i grupne indekse produktivnosti rada nepromenljivog sastava proizvodnje.

Grupni indeksi produktivnosti rada promenljivog sastava proizvodnje izračunava se na sledeći način:

$$Ipr = \frac{\Sigma Ti}{\Sigma qi} : \frac{\Sigma To}{\Sigma qo} * 100\% \quad \text{i} \quad I'pr = \frac{\Sigma Ti}{\Sigma To} : \frac{\Sigma qi}{\Sigma qo} * 100\% .$$

Grupni indeksi produktivnosti rada nepromenljivog sastava proizvodnje po metodi agregata izračunava se na sledeći način:

- sa ponderom iz baznog perioda:

$$Ipr = \frac{\Sigma qo\ ti}{\Sigma qo\ to} = \frac{\Sigma qo\ ti}{\Sigma To} * 100\% ;$$

- sa ponderom iz tekućeg perioda:

$$I'pr = \frac{\Sigma\ qi\ ti}{\Sigma\ qi\ \ to} = \frac{\Sigma Ti}{\Sigma qi\ \ to} * 100\% ,$$

gde je $t = T/q$ i predstavlja utrošeno vreme po jedinici proizvoda.

Grupni indeksi produktivnosti rada nepromenljivog sastava proizvodnje po metodi srednjih vrednosti izračunava se na sledeći način:

- sa ponderom iz baznog perioda:

$$Ipr = \frac{\Sigma \frac{ti}{to} To}{\Sigma To} * 100\% ;$$

- sa ponderom iz tekućeg perioda:

$$I'pr = \frac{\Sigma \frac{ti}{to} Ti}{\Sigma Ti} * 100\% .$$

PITANJA ZA DISKUSIJU

- ✓ Dinamička analiza vremenske serije.
- ✓ Šta pokazuju indeksni brojevi?
- ✓ Kakva je primena indeksnih brojeva u statističkoj praksi?
- ✓ Navedite i objasnite osobine indeksnih brojeva.
- ✓ Koje su osnovne vrste indeksnih brojeva?
- ✓ Koja je razlika između baznih i lančanih indeksa?
- ✓ Koja je razlika između individualnih i grupnih indeksa?
- ✓ Kako se dele indeksni brojevi u zavisnosti od ekonomske veličine na koju se odnose?
- ✓ Objasnite bazne i lančane indekse uz pomoć primera.
- ✓ Kako se vrši preračunavanje lančanih indeksa na bazne indekse?
- ✓ Šta pokazuje geometrijska stopa rasta i kako se ona računa?
- ✓ Objasnite individualne i grupne indekse količine.
- ✓ Objasnite grupne indekse količine po metodi srednjih vrednosti i Fišerov idealni indeks količine.
- ✓ Objasnite individualne i grupne indekse cene.
- ✓ Objasnite grupne indekse cene po metodi srednjih vrednosti i Fišerov idealni indeks cene.
- ✓ Šta pokazuje indeks troškova života?
- ✓ Šta je neophodno da bi se izračunao indeks troškova života?
- ✓ Objasnite individualne i grupni indekse vrednosti.
- ✓ Objasnite individualne indekse zarada.
- ✓ Kako se izračunava prosečna zarada jedne kategorije radnika?
- ✓ Objasnite grupni indeks zarada sa nepromenljivim sastavom proizvodnje.
- ✓ Objasnite grupne indekse zarada sa promenljivim sastavom proizvodnje.
- ✓ Kako se određuje indeks realne zarade?
- ✓ Šta je produktivnost?
- ✓ Pravi i recipročni pokazatelj produktivnosti rada.
- ✓ Koje informacije pruža indeks produktivnosti rada i koja su ograničenja statistike u ovoj oblasti?
- ✓ Objasnite individualne indekse produktivnosti rada.
- ✓ Objasnite grupne indekse produktivnosti rada promenljivog sastava proizvodnje.
- ✓ Objasnite grupne indekse produktivnosti rada nepromenljivog sastava proizvodnje.

FAKTORI PROIZVODNJE I NJIHOVO STATISTIČKO OBUHVATANJE

STATISTIČKO OBUHVATANJE OSNOVNIH SREDSTAVA
STATISTIČKO OBUHVATANJE MATERIJALA
STATISTIČKO OBUHVATANJE RADNE SNAGE

STATISTIČKO OBUHVATANJE FAKTORA PROIZVODNJE

Statistička teorija, metodologija i praksa nalaze primenu u skoro svim oblastima društvenog života. Ekonomskom statistikom obuhvataju se ekonomske pojave i procesi od kojih zavisi ekonomska aktivnost nacionalne ekonomije (na makro nivou), dok se poslovnom statistikom izučavaju ekonomske pojave koje se javljaju na nivou preduzeća (mikro nivou).

Ekonomskom statistikom izučavaju se pojave kao što su: društveni proizvod, nacionalni dohodak, nacionalno bogatstvo, cene, stanovništvo, nivo i dinamika životnog standarda, radna snaga, nezaposlenost, zaposlenost, produktivnost rada i drugo.

Poslovnom statistikom izučavaju se pojave kao što su: kapaciteti, zarade i radna snaga, osnovna sredstva, sirovine i materijal, zarade, produktivnost rada i drugo.

Zahvaljujući podacima koje prikupljaju statistički organi koji se nalaze u okviru statističkog sistema ekonomska statistika može pratiti ekonomske pojave od nacionalnog značaja.

Poslovna statistika može pratiti i analizirati ekonomske pojave koje se javljaju na nivou preduzeća zahvaljujući evidenciji koju vodi svako preduzeće.

U cilju vođenja racionalne ekonomske politike značajno je poznavati obim i upotrebu ukupnih raspoloživih kapaciteta. *Raspoloživi kapacitet nacionalne privrede* čine sredstva za rad (nacionalno bogatstvo), predmeti rada (prirodno bogatstvo) i radna snaga. *Raspoloživi kapacitet preduzeća* zavisi od njegovih faktora proizvodnje, a to su sredstva za rad, predmeti rada i radna snaga.

„Kapacitet predstavlja proizvodnu sposobnost faktora proizvodnje.“[76] On predstavlja proizvodnu sposobnost organizacione ili proizvodne jedinice koja može biti preduzeće, mašina, pogon, privredna grana, delatnost ili ukupna privreda. Na osnovu pomenute definicije kapaciteta uočavamo da se kapacitet može posmatrati sa makro aspekta (na nivou cele privrede) i sa mikro aspekta (na nivou privrednih subjekata).

Statistički pristup prilikom obuhvatanja kapaciteta razlikuje se po granama i vrstama delatnosti. Razlikuje se način obuhvatanja kapaciteta u industrijskim i kapaciteta u neindustrijskim delatnostima (poljoprivreda,

---

[76] Mladenović, D., Đolević, V., Šoškić, D., 2008. *Ekonomska statistika*, Ekonomski fakultet u Beogradu, Beograd, str. 121.

saobraćaj, vodoprivreda, trgovina, turizam i ugostiteljstvo).

STATISTIČKO OBUHVATANJE OSNOVNIH SREDSTAVA

Osnovna sredstva predstavljaju deo sredstava za proizvodnju koja se ne troše u potpunosti u jednom proizvodnom ciklusu, već samo deo svoje vrednosti prenose na novonastali gotov proizvod. Trošenje osnovnih sredstava prati se preko njihovog obračuna amortizacije. Kada se osnovno sredstvo u potpunosti amortizuje zamenjuje se novim.

Sve informacije o osnovnim sredstvima dobijaju se iz računovodstvene službe preduzeća. Vodi se kartoteka osnovnih sredstava kao i tekuća evidencija o korišćenju osnovnih sredstava. Zahvaljujući ovakvoj evidenciji moguće je izvršiti adekvatnu statističku analizu osnovnih sredstava.

Statistika osnovnih sredstava predstavlja jednu od težih oblasti ekonomske statistike čiji su zadaci:[77]

- utvrđivanje obima osnovnih sredstava,
- utvrđivanje strukture osnovnih sredstava,
- utvrđivanje stepena iskorišćenja osnovnih sredstava.

Zahvaljujući podacima koje obezbeđuje računovodstvena služba statistika ispituje i analizira *osnovna sredstva u njihovom vrednosnom izrazu*, a na osnovu specifičnog izučavanja osnovnih sredstava (pre svega opreme), ona se mogu statistički analizirati *i u njihovom naturalnom izrazu*.

Struktura i efikasnost korišćenja osnovnih sredstava

U zavisnosti od potrebe same statističke analize koristi se odgovarajuća podela osnovnih sredstava. Obračun statističkih pokazatelja po grupama osnovnih sredstava ima veći analitički značaj u odnosu na pokazatelje koji se

[77] Mladenović, D., Đolević, V., Šoškić, D., 2008. *Ekonomska statistika*, Ekonomski fakultet u Beogradu, Beograd, str. 122.

dobijaju na osnovu statističke analize ukupnih vrednosti osnovnih sredstava. Statističkom analizom osnovnih sredstava po pojedinim grupama preciznije se utvrđuju promene koje nastaju na osnovnim sredstvima i realnije se utvrđuje dinamika osnovnih sredstava.

Za utvrđivanje kapaciteta nacionalne ekonomije veliki značaj ima podela osnovnih sredstava na proizvodna i neproizvodna osnovna sredstva, kao i njihova dalja klasifikacija po delatnostima, granama i preduzećima. Statistička analiza osnovnih sredstava veoma često se oslanja na podelu osnovnih sredstava u tri grupe: građevinski objekti, oprema i ostalo.

Prilikom *analize tehničke opremljenosti* značajno je sagledati udeo novih osnovnih sredstava u vrednosti ukupnih osnovnih sredstava. Na nacionalnom nivou ovaj pokazatelj je značajan jer daje uvid u tehnički progres. Ovaj pokazatelj pruža korisne informacije za izradu planova održavanja i zamene osnovnih sredstava na nivou preduzeća, a i šire. Nivo tehničke opremljenosti utvrđuje se i posmatranjem opremljenosti radnika sredstvima za rad. Da bi se ovaj pokazatelj pravilno odredio neophodno je da vrednost osnovnih sredstava i broj zaposlenih radnika bude precizno definisan.

Za utvrđivanje uspešnosti poslovanja i korišćenja kapaciteta privrednog subjekta koriste se *koeficijent efikasnosti (Ke)* i *kapitalni koeficijent (Kk).* Izračunavanje ovih pokazatelja vrši se na osnovu vrednosnih izraza.

Meru efikasnosti osnovnog sredstva predstavlja *koeficijent efikasnosti* (Ke) koji se izračunava stavljanjem u odnos društvenog proizvoda (D) i osnovne vrednosti osnovnog sredstva (N):

$$Ke = \frac{D}{N}.$$

Ovaj koeficijent predstavlja vrednost društvenog proizvoda po jedinici osnovnog sredstva. On ima veću vrednost u preduzećima koja imaju niži organski sastav kapitala i obrnuto.

Kapitalni koeficijent odgovara recipročnoj vrednosti koeficijenta efikasnosti i izračunava se kao količnik između osnovne vrednosti osnovnog sredstva (N) i društvenog proizvoda (D):

$$K_k = \frac{N}{D}.$$

Ovaj koeficijent pokazuje koliko jedinica osnovnog sredstva dolazi na jednu jedinicu društvenog proizvoda. On nalazi primenu u planiranju kao ekonomski normativ.

S obzirom na to da svaki porast osnovnih sredstava treba da prouzrokuje i povećanje proizvodnje od značaja je utvrđivanje *marginalnog kapitalnog koeficijenta.* Marginalni kapitalni koeficijent se utvrđuje stavljanjem u odnos prirasta osnovnih sredstava sa prirastom društvenog proizvoda u posmatranom periodu:

$$K\dot{e} = \frac{\Delta D}{\Delta N}.$$

Kapitalni koeficijent je pogodniji za analizu iskorišćenja kapaciteta i ekonomske analize privrede kao celine i većih privrednih grupacija, dok je koeficijent efikasnosti pogodniji za analizu poslovanja preduzeća.

Vrednosno izražavanje osnovnih sredstava

Kako osnovna sredstva čini veliki broj različitih predmeta jedini način obuhvatanja njihovog ukupnog obima je vrednosnim izražavanjem. Prilikom utvrđivanja vrednosti osnovnih sredstava neophodno je oslanjati se na jednoobrazne kriterijume. Na taj način se osigurava da istovrsna osnovna sredstva imaju istu vrednost kod različitih privrednih subjekata.

Ukupna vrednost osnovnih sredstava utvrđuje se na osnovu raspoloživih informacija računovodstvene službe preduzeća ili na osnovu inventara. Tom prilikom mogu se koristiti nabavna vrednost osnovnog sredstva ili cena reprodukcije (cena koju bi preduzeće platilo u slučaju da ponovo nabavlja svoja sredstva). U cilju realnijeg utvrđivanja vrednosti osnovnih sredstava najčešće se koristi cena reprodukcije.

Zbog toga što osnovna sredstva imaju duži vek trajanja, a cene su promenljive, njihovu knjigovodstvenu vrednost treba usklađivati sa tržišnom vrednošću. Revalorizacijom vrednosti osnovnih sredstava, s vremena na vreme, omogućava se međusobno izjednačavanje knjigovodstvene vrednosti osnovnih sredstava iste vrste i kvaliteta.

Trošenje osnovnih sredstava izražava se preko amortizacije. Primenom odgovarajuće metode amortizacije računovodstvo godišnje otpisuje deo vrednosti osnovnih sredstava na ime troškova amortizacije.

Metodom revalorizacije, zajedno sa amortizacijom, obezbeđuje se očuvanje vrednosti osnovnih sredstava.

Svako osnovno sredstvo ima svoju osnovnu (bruto) vrednost i stvarnu (neto) ili sadašnju vrednost. Bruto vrednost osnovnog sredstva dobijamo metodom revalorizacije vrednosti osnovnog sredstva, dok je sadašnja vrednost jednaka razlici između bruto vrednosti i troškova amortizacije.

Bruto ili osnovna vrednost osnovnih sredstava indirektno pokazuje koliki su raspoloživi kapaciteti privrednog subjekta, dok neto vrednost pokazuje kolika je njihova raspoloživa vrednost nakon određenog perioda njihove praktične upotrebe.

Vrednost amortizacije utvrđuje se na bazi unapred propisanih normativa za pojedine vrste osnovnih sredstava. Osim toga, obračuna ekonomske amortizacije može biti zasnovan na vremenu trajanja osnovnog sredstva:

$$A = \frac{N}{T},$$

gde je: *A* – ekonomska amortizacija, *N* – osnovna vrednost sredstva, a *T* – vek trajanja osnovnog sredstva.

Ukoliko se uzme u obzir činjenica da se vrednost osnovnih sredstava povećava za vrednost većih popravki (*R*), modernizacije sredstava (*M*) i da je ostatak vrednosti *(O)*, tada je godišnja amortizacija:

$$A = \frac{N+R+M+O}{T}.$$

Stopa amortizacije (S_a) dobija se na osnovu sledećeg obrasca:

$$Sa = \frac{A}{N} * 100.$$

Pokazatelji stanja osnovnih sredstava

Pokazatelji stanja osnovnih sredstava su:

- koeficijent prosečne istrošenosti (Ki);
- koeficijent prosečne očuvanosti (Ko);
- prosečni vek trajanja sredstava (T).

Koeficijent prosečne istrošenosti (K_i) predstavlja količnik između amortizovanog dela osnovnog sredstva i njegove osnovne (bruto) vrednosti:

$$Ki = \frac{Ad}{N}.$$

Amortizovani deo osnovnih sredstava (Ad) dobija se kao proizvod godišnjeg iznosa amortizacije i broja godina stvarne praktične upotrebe osnovnih sredstava do tog trenutka (Ad= A*T). Ukoliko se amortizovani deo osnovnog sredstva izrazi u procentima dobija se *stopa prosečne istrošenosti osnovnog sredstva.*

Koeficijent prosečne očuvanosti (K_o) izračunava se kao količnik između sadašnje (stvarne) vrednosti osnovnog sredstva i osnovne (bruto) vrednosti osnovnog sredstva:

$$Ko = \frac{S}{N}.$$

Ukoliko se neamortizovani deo procentualno izrazi dobija se stopa prosečne očuvanosti osnovnog sredstva.

Zbir koeficijenata prosečne istrošenosti i prosečne očuvanosti iznosi 100% (1).

Prosečan vek trajanja osnovnog sredstva (T) izračunava se kao količnik osnovne vrednosti osnovnog sredstva i iznosa amortizacije tog osnovnog sredstva za godinu dana.

$$T = \frac{N}{A}.$$

Naturalno izražavanje osnovnih sredstava

Najvažniji deo u statistici osnovnih sredstava predstavlja oprema. Oprema se deli na energetsku opremu i proizvodnu opremu.

Energetska opema predstavlja sistem pogonskih mašina i motora koji koristeći različite prirodne izvore proizvode energiju za pokretanje proizvodne opreme. Energija koju proizvodi energetska oprema ne koristi se samo za pokretanje proizvodne opreme već i za grejanje, osvetljenje i slično.

Prema *izvoru energije* energetska oprema se deli na:

- primarne pokretače koji proizvode mehaničku energiju korišćenjem snage prirodnih izvora i
- sekundarne pokretače koji transformišu jedan oblik energije u drugi.

Prema *načinu korišćenja* energetska oprema se deli na:

- pogonske mašine i motore koji se direktno koriste u radu i
- pogonske mašine i motore koji se koriste u radu preko elektroenergetskog sistema.

Proizvodna oprema predstavlja onaj deo osnovnih sredstava koji se direktno koristi u procesu proizvodnje za obradu predmeta rada. Oprema se deli na postojeću, instaliranu i neinstaliranu opremu. U cilju ocene stanja u kome se oprema nalazi statistika deli proizvodnu opremu na: ispravnu, nekompletnu, opremu kojoj treba generalna popravka i opremu koja više ne može da se koristi. Da bi se izgvršilo adekvatno grupisanje proizvodne opreme važno je unapred definisati kriterijume za grupisanje.

Analiza stanja proizvodne opreme je značajna jer ona određuje proizvodni kapacitet i produktivnost rada u privredi.

Utvrđivanje kapaciteta proizvodne opreme

Kapacitet proizvodne opreme predstavlja njenu proizvodnu sposobnost izraženu u jedinici vremena. On se najčešće meri količinom proizvoda koju proizvodna oprema može da proizvede u jedinici vremena, ali može se iskazati i količinom potrošene energije, časovima rada mašina i drugo.

Ukoliko uzmemo u obzir brzinu rada mašina možemo govoriti o sledećim vrstama kapaciteta:

- teorijski kapacitet;
- realni kapacitet;
- optimalni kapacitet.

Teorijski kapacitet (ugrađeni, instalirani, idealni,) pokazuje sposobnost proizvodne opreme koja je određena njenim konstrukcionim osobinama. Može se računati za čas, dan, mesec i godinu. Obračun kapaciteta vrši se na bazi tehničke dokumentacije i upisan je na fabričkoj pločici opreme. Proizvodna oprema može postići svoj teorijski kapacitet ukoliko se koristi isključivo u predviđenim uslovima proizvođača.

Realni ili radni kapacitet je kapacitet koji mašina dostiže radeći u organizacionim uslovima. Tehnički ili realni kapacitet manji je od teorijskog kapaciteta za zastoje koji su posledica nedovoljne usklađenosti tehničko-tehnološke okolnosti sa njenim konstrukcionim osobinama, kao i za dane mirovanja mašine u periodima kada su praznici. Zbog toga se ovaj kapacitet određuje za mesec 20 dana, a za godinu 300 dana.

Optimalni ili proizvodni kapacitet predstavlja količinu proizvoda koju bi proizvodna oprema proizvela uz minimalne troškove po jedinici kapaciteta. Najveća ekonomičnost je obezbeđena pod uslovom da se proizvodna oprema oprimalno koristi. Proizvodni kapacitet može biti u granicama teorijskog i realnog kapaciteta, ali ne može biti veći od teorijskog kapaciteta. Optimalni kapacitet se najčešće koristi u slučaju kada se statistički izražava kapacitet i kada je potrebno vršiti planiranje proizvodnje.

Kapacitet se obično utvrđuje kao moguća proizvodnja na godišnjem nivou i tu se javlja problem određivanja broja dana za godišnji kapacitet. *Teorijski radni fond* obuhvata 365 dana i podrazumeva rad u tri smene. *Mogući radni fond* predstavlja teorijski radni fond umanjen za neradne dane kao i dane rezervisane za remont mašine. *Stvarni radni fond* odgovara stvarnom broju radnih sati proizvodne opreme tokom godine.

Pokazatelji iskorišćenja kapaciteta proizvodne opreme

Koeficijenti iskorišćenja kapaciteta koji su obrađeni u nastavku pružaju najpreciznije informacije o iskorišćenju kapaciteta proizvodnih jedinica jer oni uzimaju u obzir vreme rada i proizvodnu sposobnost opreme.

Jedan od tih koeficijenata je *Koeficijent ekstenzivnog iskorišćenja kapaciteta* (Kek). Ovim koeficijentom se na posredan način izražava iskorišćenje kapaciteta jer se ovim koeficijentom ne uzima u obzir „prazan hod” do koga dolazi zbog neracionalnog iskorišćenja mašine u procesu proizvodnje. Ovaj koeficijent iskorišćenja kapaciteta baziran je na vremenu rada mašine i izračunava se na sledeći način:

$$Kek = \frac{\text{Ostvareno vreme rada}}{\text{Moguće vreme rada}} * 100\%$$

Izračunavanje koeficijenta ekstenzivnog iskorišćenja kapaciteta **Primer 36.**

Mašina za proizvodnju staklenih flaša radila je 300 dana od mogućih 346 dana. Izračunajte koeficijent ekstenzivnog iskorišćenja kapaciteta.

Rešenje:

$$Kek = \frac{300}{346} * 100\%$$

$$Kek = 0{,}86705 * 100\% = 86{,}705\%$$

Odgovor: Zbog nedovoljnog iskorišćenja radnog vremena došlo je do gubitka kapaciteta u iznosu od 13,295%.

Drugi pokazatelj je *Koeficijent intenzivnog iskorišćenja kapaciteta* (Kik). Ovaj koeficijent se izračunava na bazi podataka o ostvarenoj proizvodnji po jedinici kapaciteta i mogućoj proizvodnji po jedinici kapaciteta. Ostvarena proizvodnja po jedinici kapaciteta se izračunava kao količnik moguće godišnje proizvodnje i željenog oblika godišnjeg kapaciteta opreme. Koeficijent intenzivnog iskorišćenja kapaciteta izračunava se na sledeći način:

$$Kik = \frac{\text{Ostvarena proizvodnja po jedinici kapaciteta}}{\text{Moguća proizvodnja po jedinici kapaciteta}} * 100\%.$$

Izračunavanje koeficijenta intenzivnog iskorišćenja kapaciteta **Primer 37.**

Mašina za proizvodnju staklenih flaša ostvaruje godišnju proizvodnju u iznosu 300.000 flaša radeći u tri smene, u trajanju od 7 radnih časova, za 300 dana. Ukoliko je moguća proizvodnja mašine 55 flaša po jednom radnom času izračunajte koeficijent intenzivnog iskorišćenja kapaciteta.

Rešenje:

$$\text{Ostvarena proizvodnja po jedinici kapaciteta} = \frac{300.000}{300*7*3} = 47,62$$

$$Kik = \frac{47,62}{55} * 100\% = 0,86582 * 100\% = 86,582\%$$

Odgovor: Zbog nedovoljnog intenziteta rada mašine došlo je do gubitka kapaciteta u iznosu od 13,418%.

Koeficijent koji pruža najpreciznije informacije o iskorišćenju kapaciteta proizvodne opreme jer se zasniva na vremenu rada i na obimu proizvodnje je *Koeficijent integralnog iskorišćenja kapaciteta* (Kiik). Ovaj koeficijent se izračunava na sledeći način:

$$Kiik = \frac{\text{Ostvarena godišnja proizvodnja}}{\text{Mogući godišnji kapacitet}} * 100\%.$$

Izračunavanje koeficijenta integralnog iskorišćenja kapaciteta **Primer 38.**

Mašina za proizvodnju staklenih flaša ostvaruje godišnju proizvodnju u iznosu 300.000 flaša radeći u tri smene, u trajanju od 7 radnih časova, za 300 dana. Ukoliko je moguća proizvodnja mašine 55 flaša po jednom radnom času izračunajte koeficijent intenzivnog iskorišćenja kapaciteta.

Rešenje:

$$\text{Mogući godišnji kapacitet} = 55*3*7*346=399.630$$

$$Kiik = \frac{300.000}{399.630}*100\% = 0,75069*100\% = 75,069\%$$

Odgovor: Ukupni gubitak u iskorišćenju kapaciteta iznosi 24,931%.

STATISTIČKO OBUHVATANJE MATERIJALA I SIROVINA

Predmeti rada, kao jedan od faktora proizvodnje, obuhvataju materijal, sirovine i poluproizvode. U zavisnosti od toga koju ulogu ima u procesu proizvodnje materijal može biti:

- osnovni;
- pomoćni;
- režijski.

Osnovni i pomoćni materijal predstavaljaju materijal za izradu. Osnovni materijal ulazi celokupnom supstancom u gotov proizvod, pomoćni materijal je neophodan da bi se uspešnije proizveo proizvod onako kako je dizajniran, dok režijski materijal omogućava održavanje prostorija i opreme.

Materijalno knjigovodstvo evidentira nabavku materijala, a praćenje materijala vrši se na osnovu nomenklature materijala. Pogonsko knjigovodstvo vodi evidenciju o potrošnji materijala.

S obzirom na to da se nabavka materijala i sirovina vrši po cenama koje se međusobno razlikuju neophodno je utvrditi prosečnu nabavnu cenu (C). Prosečna nabavna cena predstavlja ponderisanu prosečnu vrednost svih pojedinačnih nabavki i izračunava se na sledeći način:

$$\overline{C} = \frac{C1Q1+C2Q2+\cdots+CnQn}{Q1+Q2+\cdots Qn},$$

gde je $\overline{C}$ – prosečna nabavna cena, Q_1, Q_2,..., Qn – nabavljene količine, C_1, C_2, ..., Cn – cena nabavljenih materijala.

Kako finalni proizvodi imaju različite cene koštanja statistika se pretežno oslanja na planske cene.

Ukoliko su nam dostupni podaci o vrednosti zaliha i broju dana njihovog trajanja mogu se izračunati *prosečne zalihe* na sledeći način:

$$\bar{z} = \frac{\sum Vt}{\sum t},$$

gde je ΣVt – ukupna vrednost zaliha, Σt – ukupan broj dana u toku izveštajnog perioda, a $\bar{Z}$ predstavlja prosečne zalihe.

Koeficijent obrta zaliha (β_0) pokazuje koliko se puta u toku godine ili izveštajnog perioda okrenu prosečne zalihe. Ovaj koeficijent može da pokazuje i obrt po posebnim vrstama zaliha. Koeficijent obrta zaliha izračunava se na sledeći način:

$$\beta_0 = \frac{Vku}{\bar{z}},$$

gde je β_0 – koeficijent obrta zaliha, Vku – vrednost kumuliranog ulaza zaliha, a $\bar{Z}$ - prosečne zalihe.

Polazeći od koeficijenta obrta zaliha moguće je izračunati *vreme obrta zaliha* (Vo) na sledeći način:

$$Vo = \frac{Bd}{\beta_0},$$

gde je Vo – vreme obrta zalha u danima, Bd - broj dana u izveštajnom periodu, a βo - koeficijent obrta zaliha.

Za vođenje ekonomske politike od značaja je utvrđivanje *koeficijenta iskorišćenosti sirovina.* Ovaj koeficijent pokazuje koliki je iznos uštede ili prekoračenja u utrošku materijala u procentualnom iznosu. Koeficijent iskorišćenosti sirovina izračunava se na sledeći način:

$$\text{Koeficijent iskorišćenosti sirovina} = \frac{\text{Normirani utrošak - Stvarni utrošak}}{\text{Ukupni normirani utrošak}} * 100\%.$$

Izračunavanje koeficijenta iskorišćenosti sirovina **Primer 39.**

Ukupni normirani utrošak materijala preduzeća „STELA” na godišnjem nivou iznosi 650.000 dinara. U toku posmatrane godine došlo je do stvarnog utroška materijala u iznosu od 700.000 dinara. Na osnovu datih podataka izračunajte koeficijent iskorišćenosti sirovina preduzeća „STELA”.

Rešenje:

$$\text{Koeficijent iskorišćenosti sirovina} = \frac{650.000 - 700.000}{650.000} * 100\%$$

$$\text{Koeficijent iskorišćenosti sirovina} = -0,07692 * 100\% = -7,692\%$$

Odgovor: Koeficijent iskorišćenosti sirovina pokazuje da je došlo do prekoračenja normiranog utroška za 7,692% i neophodno je otkriti uzroke takve pojave.

STATISTIČKO OBUHVATANJE RADNE SNAGE

Radna snaga predstavlja jedan od najvažnijih faktora proizvodnje i zato je neophodno da statistika obezbedi informacije o stepenu iskorišćenja radnog vremena. Stepen angažovanja, posvećenost poslu, produktivnost i efikasnost rada radne snage u velikoj meri determinišu uspešnost poslovanja preduzeća. Menadžmentu preduzeća su neophodne informacije o broju i strukturi zaposlenih radnika, njihovom angažovanju, radnom vremenu i drugo. Statistika pomoću odgovarajućih pokazatelja obezbeđuje te informacije menadžmentu.

Da bi se adekvatno izvršila analiza iskorišćenja raspoloživih kapaciteta radne snage neophodno je imati uvid u brojno stanje zaposlenih radnika, ali i uvid u podatak o prosečnom broju radnika koji dolaze na posao u posmatranom vremenskom periodu.

Informaciju o *ukupnom broju zaposlenih radnika* u preduzeću dobijate na osnovu platnog spiska. S obzirom na to da je brojno stanje zaposlenih radnika promenljiva kategorija uvid u broj zaposlenih dobija se izračunavanjem *prosečnog broja zaposlenih radnika*. Prosečan broj zaposlenih radnika dobija se kao količnik radnik – dana i broja radnih dana za koji računamo prosečan broj ranika.

Funkcija zadužena za upravljanje ljudskim resursima ima sve podatke o zaposlenim radnicima. Iz evidencije koja postoji u preduzeću dobijaju se informacije koje omogućavaju uvid u strukturu zaposlenih konkretnog preduzeća. U pitanju su informacije o kvalifikacijama, polu, dužini radnog staža, radnom iskustvu i sličnom. Primenom ponderisane aritmetičke sredine izračunava se prosečna kvalifikaciona struktura zaposlenih radnika u preduzeću.

Takođe, važan je uvid u *radni staž i starosnu strukturu zaposlenih* u preduzeću jer, iako stariji radnici poseduju zavidno radno iskustvo, nakon određene starosne granice neophodno je uposliti mlađi stručni kadar kako se ne bi ugrozila uspešnost poslovanja preduzeća. Ponderisanom aritmetičkom sredinom određuje se prosečna starost i prosečan radni staž zaposlenih radnika u preduzeću.

Otpuštanjem postojećih, zapošljavanjem novih radnika, gašenjem postojećih i otvaranjem novih radnih mesta menja se broj zaposlenih radnika u preduzeću. Radnici odlaze iz preduzeća svojevoljno, tragajući za boljim radnim mestom ili zbog odlaska u penziju. Uvođenje nove savremene tehnologije često zahteva angažovanje nove radne snage. Česta promena broja zaposlenih u preduzeću nije poželjna. Pomoću stope fluktuacije zaposlenih meri se promet zaposlenih radnika u preduzeću.

Stopa fluktuacije *(Kf)* dobija se primenom sledećeg obrasca:

$$Kf = \frac{\text{Broj zamenjenih radnika}}{\text{Ukupan broj radnika}} * 100\%$$

Stopa fluktuacije ili koeficijent fluktuacije predstavlja odnos broja zamenjenih radnika i ukupnog broja radnika.

Izračunavanje koeficijenta (stope) fluktuacije **Primer 40.**

Na osnovu dostupne evidencije preduzeća „VIŠNJA" utvrđeno je da je 70 radnika zamenjeno u toku dva meseca. Izračunajte koeficijent fluktuacije zaposlenih ukoliko je na kraju drugog meseca ukupan broj zaposlenih radnika iznosio 460.

Rešenje:

$$Kf = \frac{70}{460} * 100\% = 0{,}15217 * 100\% = 15{,}217\%$$

Odgovor: U posmatranom periodu zamenjeno je 15,2147% radnika preduzeća „VIŠNJA".

Analiza pokazatelja iskorišćenja radnog vremena

Raspoloživo radno vreme u organizaciji u posmatranom periodu predstavlja *fond radnog vremena*. Da bi se utvrdilo raspoloživo radno vreme neophodno je utvrditi veličinu radnog časa i radnog dana. Njihova veličina je propisana zakonom.

Stvarno iskorišćeno radno vreme radnika utvrđuje se na osnovu pokazatelja kao što su radnik – dan i radnik – čas.

Za razliku od radnog – dana koji pokazuje koliko dana je radnik dolazio na posao, ali ne pokazuje stvarno radno angažovanje radnika na poslu, radnik – čas je pokazatelj efektivnog rada radnika u trajanju od 60 minuta.

Kada je reč o fondu radnog vremena razlikujemo kalendarski, mogući i stvarni fond radnog vremena. *Kalendarski fond radnog vremena* zasnovan je na kalendarskom broju dana i časova u godini. *Mogući fond radnog vremena* je zakonom propisano vreme koje svako preduzeće mora odrediti u periodu koji se posmatra. Reč je o stvarno raspoloživom radnom vremenu u posmatranom periodu, ali se ovo raspoloživo radno vreme u praksi retko iskorišćava u potpunosti zbog zastoja u radu, izostanaka sa posla i slično. Zbog toga se moguće radno vreme sastoji od neiskorišćenog radnog vremena i iskorišćenog radnog vremena koje odgovara *stvarno odrađenom fondu radnog vremena*. Međutim, stvarni fond radnog vremena pokazuje vreme koje su radnici proveli na poslu, ali ne i da li su oni na poslu stvarno radili ili ne.

Pokazatelji iskorišćenja radnog vremena na koje preduzeće može da se oslanja su *koeficijent iskorišćenja radne snage (Kirs), koeficijent iskorišćenja radnog dana (Kird)* i *i koeficijent integralnog iskorišćenja radnog vremena (Kiirv)*.

Za izračunavanje *koeficijenta iskoriščenja radne snage (Kirs)* neophodno je raspolagati podacima o prosečnom broju zaposlenih radnika (PBZR) i ukupnom broju zaposlenih radnika (UBZR). Ovaj koeficijent se izračunava na sledeći način:

$$\text{Kirs} = \frac{\text{Prosečan broj zaposlenih radnika}}{\text{Ukupan broj zaposlenih radnika}} * 100\%$$

i on pokazuje procentualno iskorišćenje radnog vremena sa stanovišta dolaska radnika na posao. Međutim, on ne pruža informacije o efektivnom radu tih radnika koji su dolazili u tom periodu i zbog toga nije precizan pokazatelj.

Izračunavanje koeficijenta iskorišćenja radne snage **Primer 41.**

U preduzeću „MELEM” ukupno radi 980 zaposlenih. U oktobru 2015. godine ostvareno je ukupno 25 radnih dana u trajanju od 8 časova. Takođe, ostvareno je 18.400 radnik – dana i 128.800 radnik – časova. Na osnovu ovih pokazatelja izračunajte koeficijent iskorišćenja radne snage.

Rešenje:

$$\text{Prosečan broj zaposlenih radnika} = \frac{\text{Radnik - dani}}{\text{Radni dani}} = \frac{18.400}{25} = 736$$

$$Kirs = \frac{736}{980} * 100\% = 0{,}75102 * 100\% = 75{,}102\%$$

Odgovor: U posmatranom periodu gubitak u iskorišćenju radnog vremena preduzeća „MELEM” iznosi 24,898% (75,102-100).

Koeficijent iskorišćenja radnog dana (Kird) oslanja se na podatke o prosečnom trajanju radnog dana (PTRD) i vremenskom trajanja radnog dana koje je propisano zakonom. Ovaj koeficijent se računa na sledeći način:

$$Kird = \frac{\text{Prosečno trajanje radnog dana}}{7\ (8)} * 100\%$$

Prosečno trajanje radnog dana dobija se kao količnik između ostvarenog radnog vremena izraženog radnik – časovima i ostvarenog radnog vremena izraženog radnik – danima u posmatranom periodu. Ovaj koeficijent pokazuje koliko su efikasno koristili radni radn oni radnici koji su u posmatranom periodu dolazili na posao.

Izračunavanje koeficijenta iskorišćenja radnog dana **Primer 42.**

U preduzeću „MELEM” ukupno radi 980 zaposlenih. U oktobru 2015. godine ostvareno je ukupno 25 radnih dana u trajanju od 8 časova. Takođe, ostvareno je 18.400 radnik – dana i 128.800 radnik – časova. Na osnovu ovih pokazatelja izračunajte koeficijent iskorišćenja radnog dana.

Rešenje:

$$\text{Prosečno trajanje radnog dana} = \frac{\text{Radnik - časovi}}{\text{Radnik - dani}} = \frac{128.800}{18.400} = 7$$

$$Kird = \frac{7}{8} * 100\% = 0{,}875 * 100\% = 87{,}5\%$$

Odgovor: U posmatranom periodu gubitak u iskorišćenju radnog vremena preduzeća „MELEM” zbog nedovoljno efikasnog iskorišćenja raspoloživog radnog vremena iznosi 12,5% (87,5-100).

Koeficijent integralnog iskorišćenja radnog vremena (Kiirv) u potpunosti meri iskorišćenost radnog vremena jer uzima u obzir efikasnost rada radnika, kao i dolaznost radnika na posao. Ovaj koeficijent se izračunava na sledeći način:

$$Kiirv = \frac{\text{Ostvareni efektivni časovi rada radnika}}{\text{Mogući fond časova rada radnika}} * 100\%$$

Izračunavanje koeficijenta integralnog iskorišćenja radnog vremena **Primer 43.**

U preduzeću „MELEM" ukupno radi 980 zaposlenih. U oktobru 2015. godine ostvareno je ukupno 25 radnih dana u trajanju od 8 časova. Takođe, ostvareno je 18.400 radnik – dana i 128.800 radnik – časova. Na osnovu ovih pokazatelja izračunajte koeficijent iskorišćenja radnog dana.

Rešenje:

$$\text{Mogući fond časova rada radnika} = 980 * 8 * 25 = 196.000$$

$$Kiirv = \frac{128.800}{196.000} * 100\% = 0,65714 * 100\% = 65,714\%$$

Odgovor: U posmatranom periodu ukupan gubitak u iskorišćenju radnog vremena preduzeća „MELEM" iznosi 34,286% (65,714-100). Dakle, ovo preduzeće je svoj raspoloživi radni potencijal u oktobru mesecu iskoristilo sa 65,714%.

Pored ovih pokazatelja kao pokazatelj ekstenzivnog iskorišćenja radne snage koristi se *koefijent smena radnika (S)* koji se izračunava na sledeći način:

$$S = \frac{Z}{Z_1 + \frac{Z_2}{2} + \frac{Z_3}{3}},$$

gde je Z - broj zaposlenih radnika u svim smenama, Z_1 – broj zaposlenih na radnim mestima na kojima se radi u prvoj smeni, Z_2 – broj zaposlenih na radnim mestima na kojima se radi u dve smene, a Z_3 – broj zaposlenih na radnim mestima na kojima se radi u tri smene. Teorijski posmatrano ovaj koeficijent može uzeti vrednost u intervalu između 1 i 3 (1≤S≤).

PITANJA ZA DISKUSIJU

- ✓ Čemu je namenjena ekonomska statistika?
- ✓ Šta je predmet izučavanja poslovne statistike?
- ✓ Šta čini raspoložive kapacitete privrede, a šta preduzeća?
- ✓ Objasnite pojam kapaciteta.
- ✓ Koji su zadaci statistike osnovnih sredstava?
- ✓ Objasnite analizu tehničke opremljenosti.
- ✓ Objasnite koeficijent efikasnosti, kapitalni koeficijent i marginalni kapitalni koeficijent.
- ✓ Vrednosno izražavanje osnovnih sredstava.
- ✓ Objasnite obračun ekonomske amortizacije.
- ✓ Koji su pokazatelji stanja osnovnih sredstava?
- ✓ Šta pokazuje koeficijent prosečne istrošenosti?
- ✓ Šta pokazuje koeficijent prosečne očuvanosti?
- ✓ Kako se deli energetska oprema?
- ✓ Šta znate o proizvodnoj opremi?
- ✓ Kako se utvrđuje kapacitet proizvodne opreme?
- ✓ Objasnite teorijski kapacitet proizvodne opreme.
- ✓ Objasnite realni kapacitet proizvodne opreme.
- ✓ Objasnite optimalni kapacitet proizvodne opreme.
- ✓ Kako se određuje broj dana za godišnji kapacitet?
- ✓ Objasnite koeficijent ekstenzivnog iskorišćenja kapaciteta.
- ✓ Objasnite koeficijent intenzivnog iskorišćenja kapaciteta.
- ✓ Objasnite koeficijent integralnog iskorišćenja kapaciteta.
- ✓ Koje vrste materijala poznajete?
- ✓ Gde se evidentira nabavka, a gde potrošnja materijala?
- ✓ Objasnite koeficijent obrta zaliha i vreme obrta zaliha.
- ✓ Zbog čega je značajno utvrđivanje koeficijenta iskorišćenosti sirovina.
- ✓ Kako se utvrđuje ukupan, a kako prosečan broj zaposlenih?
- ✓ Na koji način se određuje prosečna starosna struktura i prosečan radni staž zaposlenih radnika u preduzeću?
- ✓ Kojim pokazateljem se prati promet zaposlenih radnika u preduzeću?
- ✓ Objasnite kalendarski, mogući i raspoloživi fond radnog vremena.
- ✓ Kako se utvrđuje stvarno iskorišćeno radno vreme radnika?
- ✓ Koji su pokazatelji iskorišćenja radnog vremena?
- ✓ Objasnite koeficijent iskorišćenja radne snage.
- ✓ Objasnite koeficijent iskorišćenja radnog dana.
- ✓ Objasnite koeficijent integralnog iskorišćenja radnog vremena.
- ✓ Objasnite koeficijent smena radnika.

9.

REVIZIJA UGOVORNE CENE PRIMENOM METODA KLIZNE SKALE

Pojam metoda klizne skale

Dejstva metoda klizne skale

Principi formulisanja klizne skale

Oblici klizne skale

KLAUZULA REVIZIJE CENE U SPOLJNOTRGOVINSKOM POSLOVANJU

Određivanje fiksne cene spoljnotrgovinskim ugovorom nije u interesu izvoznika s obzirom na to da na duži rok cene i troškovi imaju tendenciju porasta u svim zemljama. *Metoda klizne skale* omogućava sigurniju međunarodnu razmenu dobara i usluga u uslovima nestabilnih cena na tržištu. Ova metoda omogućava korekciju ugovorne cene srazmerno promeni veličine troškova proizvodnje. Kao osnov formiranja cene predmeta kupoprodaje koristi se iznos troškova proizvodnje na dan zaključenja kupoprodajnog ugovora (bazni indeksi).

Suština primene metoda klizne skale sastoji se u korekciji ugovorne cene predmeta kupoprodaje (Po) u cilju njenog svođenja na nivo tržišne cene. Formiranje izvozne cene vrši se kroz:[78]

- *predkalkulaciju* – gde se određuje cena na osnovu pretpostavljenih troškova;
- *kontrolnu kalkulaciju* – gde se prvobitno određena cena koriguje za iznos stvarno nastalih troškova realizacije izvoza i
- *konačnu kalkulaciju* – gde se analizira obavljen posao kako bi se stvorile osnove za planiranje aktivnosti u budućnosti.

Iznosi varijabilnih troškova (troškova materijala za izradu (Mo) i ličnih dohodaka zaposlenih u proizvodnji predmeta kupoprodaje (So)) unose se numerički u odredbu teksta kupoprodajnog ugovora, pri čemu iznosi slovima i brojevima moraju biti isti. Ukoliko se desi da su navedeni iznosi različiti, apsolutnu važnost ima iznos napisan slovima.

Na grafikonu 24. prikazana je klizna skala gde je:

O – datum zaključenja kupoprodajnog ugovora,

J – ugovoreni datum isporuke robe,

O-J – ugovoreni rok trajanja do isporuke robe,

r_1 – svodna rezultanta nastalih promena u troškovima proizvodnje u smislu njihovog povećanja,

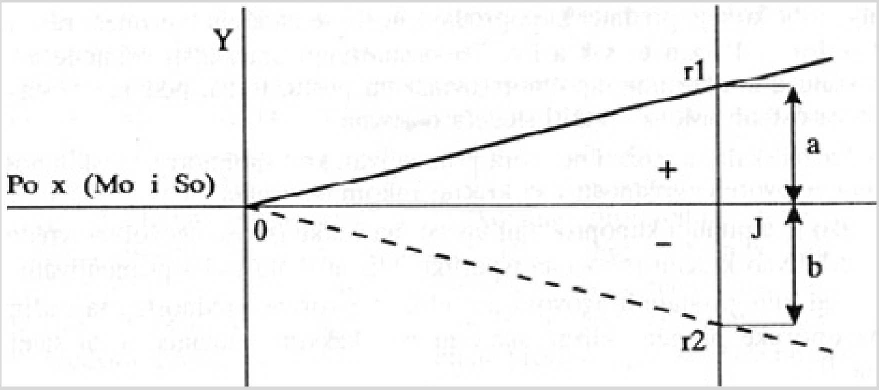
[78] Pejčić, D. mart, 2007. „Kalkulacija izvozne cene“, *Exporter*,. Agencija za strana ulaganja i promociju izvoza, Beograd, str. 16.

r_2 – svodna rezultanta nastalih promena u troškovima proizvodnje u smislu njihovog smanjenja,

a – nastala razlika u troškovima proizvodnje u smislu njihovog povećanja u odnosu na bazno stanje (Mo i So),

b – nastala razlika u troškovima proizvodnje u smislu njihovog smanjenja u odnosu na bazno stanje (Mo i So).

Grafikon 24. Primena klizne skale



Izvor: Unković, M. Stakić, B., 2011. *Spoljnotrgovinsko i devizno poslovanje,* Singidunum, Beograd, str. 133.

Dakle, uz pomoće kliznih cena prodavci minimiziraju rizike vezane za isporuku robe veće dodate vrednosti čija se proizvodnja i isporuka odvija u dužem vremenskom periodu.

PRINCIPI FORMULISANJA I DEJSTVA KLIZNE SKALE

Određeni elementi, ili preduslovi, determinišu i uslovljavaju dejstvo klizne skale u kupoprodajnom ugovoru. Takođe, oni određuju koji će oblik klizne skale biti odabran u konkretnoj situaciji.

Reč je o elementima koji oslikavaju karakter okolnosti koje nalažu unošenje klauzule o reviziji cene. Kupoprodajni ugovori se međusobno razlikuju po elementima kao što su rok isporuke robe, vrednost robe ili vrednost usluga, mogućnost i uslovi plaćanja kupca i slično.

Postoje posebni principi formulisanja i dejstva klizne skale koji se moraju uvažavati prilikom izbora adekvatnog oblika klizne skale: [79]

- obezbediti zaštitu interesa obeju ugovornih strana u jednakoj meri i na isti način,
- element neizvesnosti u pogledu budućeg razvoja tržišnih okolnosti u zemlji prodavca mora da postoji u trenutku formiranja klauzule o reviziji ugovorene cene,
- u odnosu na razvoj tržišnih okolnosti u budućnosti metoda klizne skale treba da omogući otklanjanje elemenata igre na sreću,
- finalna cena predmeta kupoprodaje treba realno da odražava sve nastale promene u troškovima proizvodnje,
- formulisanje i dejstvo mehanizma klizne skale dopušteno je samo u odnosu na ugovorenu cenu predmeta kupoprodaje,
- u toku trajanja ugovorenog roka isporuke neophodno je uskladiti vreme dejstva varijabilnih faktora troškova proizvodnje sa vremenom stvarnog nastajanja ovih troškova,
- primena metoda klizne skale moguća je svuda gde su na tržištu zemlje prodavca promene cena materijala i plata izrade ne određuju administrativno već su posledica delovanja ekonomskih zakona tržišta,
- ukoliko je ugovorna strana, isključivo svojom krivicom, propustila da izvrši neku radnju u uobičajeno (dogovoreno) vreme metoda klizne skale ne štiti ugroženu stranu od otežanog izvršenja ugovorne obaveze.

U nekim slučajevima nije moguće detaljnije uraditi analizu troškova proizvodnje u vezi sa karakteristikama robe prilikom sklapanja kupoprodajnog ugovora. U tom slučaju ugovara se klauzula revizije ugovorne cene koja uvažava promene cena srazmerno promenama cena najvažnijih sirovina i nadnica neophodnih prilikom izrade date robe. Formula za reviziju cena u ovom slučaju bi izgledala ovako:[80]

[79] Tešić, M. 1996. *Spoljnotrgovinsko poslovanje*, Savremena administracija, Beograd, str. 300.

[80] Marjanović, M., Spasić, K. 2015. *Poslovna statistika*, Visoka poslovna škola strukovnih studija, Leskovac, str, 183.

$$P = P_0 \left\{ \frac{\frac{M}{M_0} + \frac{S}{S_0}}{2} \right\}$$

P – konačna, revidirana cena za fakturisanje robe,

P0 – ugovorena cena robe,

M – indeks ili cena materijala u proseku po jedinici mere na dan isporuke,

M0 – indeks ili cena materijala u proseku po jedinici mere na dan zaključenja ugovora,

S – indeks ili stvarni iznos nadnica po jedinici vremena u proseku na dan isporuke robe,

S0 – indeks ili stvarni iznos nadnice po jedinici vremena u proseku na dan zaključenja ugovora.

S obzirom na to da kod ovog oblika formule ne postoje faktori fiksnog dela troškova proizvodnje dolazi do variranja rezultata usled pada ili skoka cena koji utiče na variranje ukupne ugovorne vrednosti.

Primena formule za reviziju ugovornih cena **Primer 44.**

Dana 01.01.2016. godine zaključen je kupoprodajni ugovor sa jednom nemačkom firmom u vezi hidrofora za vodu. Ugovorena cena robe franko (srpsko–nemačka) granica je OA € 70.000. Troškovi transporta i osiguranja od fabrike do granice iznosa OA € 1.000. Rok za isporuku robe je do kraja meseca septembra 2016. Ugovorom nisu predviđene delimične isporuke. Prilikom zaključenja ugovora o isporuci ugovorena je obaveza plaćanja avansa od 25%, dok će se ostatak platiti iz akreditiva. Ukoliko dođe do promena cena materijala i nadnica u zemlji prodavca primeniće se revizija ugovorne cene po sledećoj formuli.

$$P = P_0 \left\{ \frac{\frac{M}{M_0} + \frac{S}{S_0}}{2} \right\}$$

P – konačna (fakturna) cena,

P0 – ugovorena cena (franko fabrika OA € 69.000,

M – aritmetička sredina svih mesečnih notiranja indeksa za čelični liv u toku prve 2/3 ugovorenog roka isporuke,

$M0$ – indeks cene čeličnog liva za 1 t važeći na dan zaključenja ugovora (01.01.2016.) = 165.

S – aritmetička sredina pojedinih mesečnih notiranja indeksa

$S0$ – indeks minimalnih dnevnih zarada stručnog radnika u mašinskoj industriji važeći na dan zaključenja ugovora (01.01.2016.) = 129.

Ukoliko nastale promene u konačnoj ceni budu manje od +/- 2,5% neće si primenjivati klizna skala, dok će se obračun avansa vršiti postupkom periodične revizije.

Prema zvaničnim podacima indeksi cene za čelični liv i nadnice su se kretali na sledeći način:

	M	S		M	S
Bazni indeks	165	129	1. mesec	167	131
2. mesec	174	132	3. mesec	178	135
4. mesec	180	138	5. mesec	182	135
6. mesec	181	140	7. mesec	183	139
8. mesec	185	141	9. mesec	186	144

Rešenje:

$$M = \frac{167 + 174 + 178 + 180 + 182 + 181}{6} = \frac{1062}{6} = 177$$

$$S = \frac{131 + 132 + 135 + 138 + 135 + 140 + 139 + 141 + 144}{9} = \frac{1235}{9} = 137{,}22$$

M=Mo i S=So avans (A)=OA € 17.250

Obračunavanje ostatka:

Po=70.000-1.000= 69.000 € 69.000 – 17.250 = 51.750 €

$$P = 51750 \left\{ \frac{\frac{177}{165} + \frac{137{,}22}{129}}{2} \right\} = 51750 \left\{ \frac{1{,}073 + 1{,}064}{2} \right\}$$

$$P = 51750 \left\{ \frac{2{,}137}{2} \right\} = 51750 \cdot 1{,}0685 = 55294{,}88$$

55.294,88 – 51.750 = 3.544,88

Rekapitulacija obračuna

Ugovorna cena franko fabrika	OA € 69.000
Transporti osiguranje do granice	1.000
Promena cene (porast)	3.544,88
Iznos koji kupac treba da plati	OA € 73.544,88

OBLICI KLIZNE SKALE

U praksi postoji veliki izbor kliznih skala, u zavisnosti od dominantnih elemenata koji čine suštinu ugovora između ugovornih strana.

Okolnosti u kojima se zaključuje kupoprodajni ugovor, ugovorom treba precizirati primenu onog oblika klizne skale koji najtačnije odražava promene i uticaj okolnosti na fakturnu cenu robe.

Dakle, uslovi pod kojim se ugovor zaključuje određuju koji će se oblik klizne skale primeniti i kako će glasiti klauzula o reviziji cene.

Praksa poznaje sledeće oblike klizne skale:[81]

- tržišna cena na dan isporuke,
- plaćanje unapred iil veći avans,
- kombinovana primena klizne skale kod delimičnih isporuka na duže vreme,
- integralni oblik klizne skale (najsavršeniji vid primene metoda klizne skale).

Za svaku pojedinačnu isporuku robe može se odrediti klizna skala upotrebom određene formule. U praksi se razlikuju:[82]

[81] Marjanović, M., Spasić, K. 2015. *Poslovna statistika*, Visoka poslovna škola strukovnih studija, Leskovac, str, 182.

[82] Unković, M. Stakić, B., 2011. *Spoljnotrgovinsko i devizno poslovanje,* Singidunum, Beograd, str. 134., 135. i 137.

- skraćeni (opisni) oblik matematičke formule klizne skale,
- razvijeni oblik matematičke formule klizne skale,
- oblik matematičke formule klizne skale za usluge.

Skraćeni (opisni) oblik matematičke formule klizne skale

Kod opisnog oblika klizne skale jasno su formulisani i opisani uslovi i način obračuna promena koje će nastati. Ne postoji poseban oblik formule koji se koristi za obračun promena ugovorene cene. Algebarskim izrazom prvobitno formulisanih odnosa može se dobiti matematička formula klizne skale koja je slična razvijenom obliku matematičke formule klizne skale. Zahvaljujući opisu odnosa učešća varijabilnih faktora troškova proizvodnje i odnosa raspodele promena koje su nastale u ovim troškovima određuje se dejstvo ove klizne skale.

Primena opisnog oblika matematičke formule klizne skale

Primer 45.

Da bi se odredila ugovorna cena koriste se bazni indeksi cena jedne tone lima i indeksa prosečne nadnice kvalifikovanog radnika na dan zaključenja ugovora. Ukoliko dođe do poskupljenja ili pojeftinjenja konkretnog materijala za 1% u toku 1/3 ugovorenog roka isporuke ugovorna cena će se povećati ili smanjiti za 0,5% ($\pm 1\% M = 0,5 \times P_0$). Ukoliko dođe do prosečnog povećanja ili smanjenja nadnica kvalifikovanog radnika ugovorna cena robe će se povećati ili smanjiti za 0,50% u toku 2/3 ugovorenog roka isporuke ($\pm 1\% S = 0,50 \times P_0$).

Prema zvaničnim podacima indeksi cene lima i nadnice su se kretali na sledeći način:

	M	S		M	S
Bazni indeks	183	120	1. mesec	182	120
2. mesec	177	120	3. mesec	163	127
4. mesec	154	125	5. mesec	152	130
6. mesec	140	130	7. mesec	137	130
8. mesec	139	130	9. mesec	136	132
10. mesec	131	135	11. mesec	134	135
12. mesec	132	135			

Rešenje:

$$M = \frac{182 + 177 + 163 + 154}{4} = \frac{676}{4} = 169$$

$$S = \frac{130 + 130 + 130 + 130 + 132 + 135 + 135 + 135}{8} = \frac{1057}{8} = 132{,}125$$

Po=350.200 €

Obračunavanje ostatka:

$$P = Po\left(0{,}15 + 0{,}5\frac{M}{Mo} + 0{,}50\frac{S}{So}\right) = 350.200\left(0{,}15 + 0{,}5\frac{169}{183} + 0{,}50\frac{132{,}125}{120}\right)$$

=350.200(0,15+0,46+0,55)=320.200*1,16=371.432 €

povećanje: 371.432 – 350.200 = 21232 €

Zbog suprotnosti u promenama cena nadnica i materijala došlo je do razlike u ceni za 6,06 %.

Razvijeni oblik matematičke formule klizne skale

Razvijeni oblik matematičke formule klizne skale koristi se u uslovima izrazite nestabilnosti tržišta prodavca i kada su u pitanju ugovori velike vrednosti sa najdužim rokovima isporuke (više godina).

Za primenu ovog oblika klizne skale neophodno je da budu ispunjeni sledeći uslovi:[83]

- da u zemlji prodavca postoji uredna evidencija i objavljivanje podataka o kretanju nivoa zarada ili indeksa nivoa zarada radnika zaposlenih u neposrednoj proizvodnji predmeta kupoprodaje, koji je uzet za bazu obračuna;
- da u zemlji prodavca postoji uredna evidencija i objavljivanje podataka o kretanju cena ili indeksa materijala za izradu koji se uzima za bazu obračuna;
- da se u zemlji prodavca poznaju detaljne strukture prodajne cene predmeta kupoprodaje, da bi se na toj osnovi mogao utvrditi indeks učešća svake pojedine grupe troškova.

[83] Marjanović, M., Spasić, K. 2015. *Poslovna statistika*, Visoka poslovna škola strukovnih studija, Leskovac, str, 183.

Razvijeni oblik matematičke formule klizne skale ima više oblika koji imaju različitu formu. Inače, ovaj oblik klizne skale je najsavršeniji i ima široku primenu jer odražava sve nastale promene u troškovima proizvodnje koje proizvođač ima.

Ukoliko u toku ugovorenog roka isporuke u zemlji prodavca dođe do promene u ceni materijala za izradu i zarada radnika (uzetih za bazu) koji rade u neposrednoj proizvodnji robe koja je predmet kupoprodaje, konačna cena po primeni klizne skale odrediće se na sledeći način:

$$P = \frac{P_0}{100}\left(a + b\,\frac{M}{M_0} + c\,\frac{S}{S_0}\right),$$

ili:

$$P = P_0\left[\frac{a}{100} + \left(\frac{b}{100}\cdot\frac{M}{M_0}\right) + \left(\frac{c}{100}\cdot\frac{S}{S_0}\right)\right],$$

Gde je:[84]

P = konačna, revidirana cena na osnovu koje će kupcu biti sastavljena faktura za kupljenu robu.

P0 = ugovorena cena koja važi na dan zaključenja ugovora,

M0 = cena ili indeks cena po jedinici mere materijala za izradu koji je uzet na bazi obračuna i važi na dan zaključenja kupoprodajnog ugovora,

M = ponderisana aritmentička sredina ili aritmetička sredina notiranih cena ili indeksa cena po jedinici mere materijala koji je uzet kao baza u toku odgovarajućeg dela ugovorenog roka isporuke,

S0 = minimalna zarada stručnog radnika po jednom satu,

S = ponderisana aritmetička sredina ili aritmetička sredina notiranih iznosa satnica ili indeksa iznosa satnica za radnika kvalifikacije uzete za bazu, u toku odgovarajućeg dela ugovorenog roka isporuke,

a = udeo fiksnih (opštih) troškova proizvodnje, koji se ne menjaju u zavisnosti od promena okolnosti na tržištu,

b = udeo troškova materijala (sirovine) za izradu u ukupnim

[84] Tešić, M. 1996. *Spoljnotrgovinsko poslovanje*, Savremena administracija, Beograd, str. 302.

troškovima proizvodnje,

c = udeo zarade proizvodnih radnika u ukupnim troškovima proizvodnje uključujući i davanja na ime socijalnog osiguranja.

Ukupni fiksni i ukupni varijabilni troškovi proizvodnje sadržani su u strukturnim indeksima učešća (*a, b, c*), pa je:

a + b + c = 100, odnosno,

$$\frac{a}{100}+\frac{b}{100}+\frac{c}{100}=1$$

Na primer, učešće ove tri grupe troškova u ukupnim troškovima je:

a=21%, b=37%, c=42%

21+37+42=100

0,21+0,37+0,42=1

Svako pomeranje u odnosima ova tri indeksa ima dvojake posledice:[85]

- smanjenje ili povećanje bilo koga od navedenih indeksa odražava se u istoj meri na jednom ili na oba ostala indeksa, u suprotnom smislu;
- pomeranje u odnosima indeksa učešća može da vrši i određeni uticaj na konačnu cenu predmeta kupoprodaje.

Kod primene ove formule, izvozna preduzeća bi trebalo da imaju u vidu sledeće: [86]

- „zbir koeficijenata a, b i c mora biti 1, odnosno 100%;
- u ugovoru je potrebno navesti relevantan statistički izvor za podatke o indeksima cena materijala i radne snage kako bi bilo sprečeno arbitrarno određivanje ovih veličina;
- usled generalnog trenda povećanja opštih troškova prozvodnje, koeficijent a može biti predmet povremenih revizija;
- bazna cena P0, kao i nova cena P1 trebalo bi da bude određena prema paritetu EXW fabrika prodavca;
- ugovorom bi trebalo da bude određen termin kada će biti utvrđena naredna cena P1;

[85] Marjanović, M., Spasić, K. 2015. *Poslovna statistika*, Visoka poslovna škola strukovnih studija, Leskovac, str, 184.
[86] Pejčić, D. mart, 2007. „Kalkulacija izvozne cene“, *Exporter*,. Agencija za strana ulaganja i promociju izvoza, Beograd, str. 16.

- maksimalni rast cene za narednu isporuku po pravilu ne prelazi visinu inflacije u datom periodu u zemlji isporuke, a kupci često insistiraju na dogovaranju raspona u kome cena može varirati u narednom periodu."

Tolerancija u dejstvu klizne skale se ugovara obično na nivou ±2 do 5%, što znači da se klizna skala neće primenjivati ako promene ugovorene cene robe ili usluge ne budu veće od, na pr. ±3 %. Ukoliko se jave velike i nagle promene troškova proizvodnje robe koja je predmet kupoprodaje onda se primenjuje ograničenje u dejstvu formule klizne skale.

Način i vreme obračuna nastalih promena se može vršiti po završetku cele isporuke. Kada se radi o isporukama kod obimnijih ugovora način i vreme obračuna nastalih promena vrši se po pojedinim delimičnim isporukama.

Obično se ugovorom definiše način i rok plaćanja nastale razlike u ugovorenoj ceni predmeta kupoprodaje zbog toga što je došlo do primene klizne skale. Najčešće se ovo plaćanje vrši doznakom i to u roku od mesec dana.

Kada se kod kupoprodajnih ugovora javi variranje *određenog dela opštih troškova proizvodnje* koristi se odgovarajuća formula klizne skale.

Ukoliko su ugovorne strane saglasne da je dozvoljeno kolebanje opštih troškova proizvodnje (režijski materijal (R_m), režijske zarade (R_s), transportne tarife (T_t) i fiskalna davanja (F_t)) u toku celokupnog ugovornog roka isporuke klizna skala ima sledeći oblik:

$$P = \frac{P_0}{100}\left[a-(d+e+f+g+\ldots+n)+d\frac{R_m}{R_{m0}}+e\frac{R_s}{R_{s0}}+f\frac{T_f}{T_{f0}}+g\frac{F_t}{F_{t0}}+b\frac{M'}{M'_0}+b\frac{M''}{M''_0}+b\frac{M'''}{M'''_0}+c\frac{S}{S_0}\right]$$

Ukoliko se analizom strukture troškova proizvodnje robe koja je predmet kupoprodaje utvrde indeksi njihovog učešća u prodajnoj ceni:

$a = 18\%$, $d = 2\%$, $e = 4\%$, $f = 5{,}5\%$, $g = 1{,}8\%$, $b = 41\%$, $b_1 = 6\%$, $b_2 = 11\%$, $b_3 = 6\%$, $c = 4{,}7\%$, pa je:

$$P = \frac{P_0}{100}\left[18+(2+4+5{,}5+1{,}8)+2\frac{R_m}{R_{m0}}+4\frac{R_s}{R_{s0}}+5{,}5\frac{T_f}{T_{f0}}+1{,}8\frac{F_t}{F_{t0}}+6\frac{M'}{M'_0}+11\frac{M''}{M''_0}+6\frac{M'''}{M'''_0}+4{,}7\frac{S}{S_0}\right]$$

d = procenat učešća troškova režijskog materijala uzetog kao baza u ukupnim troškovima proizvodnje po jedinici mere robe koja je predmet kupoprodaje,

e = procenat učešća troškova režijskih zarada radnika uzetog za bazu u ukupnim troškovima proizvodnje po jedinici mere robe koja je predmet kupoprodaje,

f = procenat učešća troškova podvoza materijala za izradu i drugih potreba po jedinic mere robe koja je predmet kupoprodaje,

g = procenat učešća fiskalnih davanja i taksi u ukupnim troškovima proizvodnje jedinice mere robe koja je predmet kupoprodaje.

Zbir indeksa d+e+f+g ne daje vrednost α iz razloga što zaradu proizvođača nije moguće staviti pod režim varijabilnog dela troškova proizvodnje, pa ta zarada odgovara iznosu razlike vrednosti indeksa α i zbira indeksa d, e, f i g.

Rm_0 = cena ili indeks cene režijskog materijala po jedinici mere koji važi na dan zaključivanja kupoprodajnog ugovora,

Rm = ponderisana aritmetička sredina notiranih ili dokumentovanih cena ili indeksa cena po jedinici mere materijala uzetog kao baza u toku trajanja celog ugovorenog roka isporuke,

Rs_0 = indeks ili iznos indeksa zarada režijskog radnika po jednom efektivnom času rada koji važi na dan zaključivanja kupoprodajnog ugovora,

Rs = ponderisana aritmetička sredina notiranih ili dokumentovanih iznosa ili indeksa iznosa satnice režijskog radnika uzetog za bazu u toku trajanja celog ugovorenog roka isporuke,

Tt_0 = nivo transportnih tarifa, važećih na dan zaključivanja kupoprodajnog ugovora,

Tt = ponderisana aritmetička sredina notiranih ili dokumentovanih, na ugovoreni način nastalih promena transportne tarife za materijal za izradu koji je uzet kao baza u toku celog trajanja ugovorenog roka isporuke,

Ft_0 = fiskalna davanja iil takse po jedinici mere roba ili usluga na dan zaključenja ugovora,

Ft = ponderisana aritmetička sredina notiranih ili dokumentovanih, po ugovoru nastalih promena visine fiskalnih davanja i taksi u toku trajanja celokupnog ugovora,

$b1, b2, b3$ = procenti učešća tri kategorije materijala za izradu u troškovima proizvodnje jedne jedinice mere predmeta kupoprodaje, pri čemu njihov zbir daje svodni indeks b,

M', M'', M''' = označavaju vrste tri relevantne kategorije materijala za izradu sa cenom ili ponderom cene koji je validan na dan zaključenja kupoprodajnog ugovora.

c = procenat učešća zarade radnika u prodajnoj ceni predmeta kupoprodaje, pri čemu je $c = c_1+c_2+c_3$.

Ovaj deo klizne skale odnosi se na zarade radnika i izgleda ovako:

$$\ldots + c_1 \frac{KV}{KV_0} + c_2 \frac{VKV}{VKV_0} + c_3 \frac{DI}{DI_0}$$

Oblik matematičke formule klizne skale za usluge

Nestabilna kretanja na tržištu prodavca mogu uticati i na usluge. Oblik matematičke formule klizne skale za usluge dat je u nastavku:

$$P = \frac{P_o}{100}\left[a + c \cdot \frac{S}{S_o}\right]$$

Matematička formula klizne skale za usluge obično ne sadrži faktore materija. Izuzetak je slučaj kada prodavac usluga isporučuje, pored usluga, i neke kategorije materijala za ugradnju (na primer, izgradnja i montaža građevinskih objekata i slično) kada se primenjuje prethodna formula klizne skale koja sadrži taj element troškova. Ukoliko se cene na malo kreću gore-dole u intervalu od +/-3% onda se indek cena na malo može koristiti kod klizne skale za usluge.

PITANJA ZA DISKUSIJU

- ✓ Zbog čega se uvodi klauzula revizije cene u spoljnotrgovinskom poslovanju?
- ✓ Nacrtajte i objasnite grafikon klizne skale.
- ✓ Navedite principe formulisanja i dejstva klizne skale.
- ✓ Kroz praktični primer objasnite primenu opšte formule za reviziju ugovorne cene.
- ✓ Koji uslovi moraju biti ispunjeni da bi se primenio razvijeni oblik matematičke formule klizne skale?
- ✓ Šta izvozna preduzeća moraju imati u vidu kada se primenjuje razvijeni oblik matematičke formule klizne skale?
- ✓ Ukoliko je tolerancija u dejstvu klizne skale ugovorena na nivou ±2% do 5%, a identifikovane promene ugovorne cene robe i usluga su ±3% da li će se primeniti ugovorena klizna skala?
- ✓ Objasnite oblik klizne skale koja omogućava i variranje dela opštih troškova proizvodnje.
- ✓ Kroz primer objasnite skraćeni oblik klizne skale.
- ✓ Po čemu je karakteristična formula klizne skale za usluge?

10.

ZBIRKA REŠENIH ZADATAKA

MERE CENTRALNE TENDENCIJE, MERE DISPERZIJE I MERE OBLIKA RASPOREDA

1. U preduzeću za proizvodnju plastičnih kesa 15 zaposlenih u jednom mesecu primili su platu u hiljadama dinarima:

903 966 995,2 1014,5 956 625 820 953,5 875 899,6

Na uzorku od 15 radnika izračunajte prosečna primanja.

Rešenje:

$$\overline{X} = \frac{\Sigma xi}{N} = \frac{903+966+995{,}2+1014{,}5+956+625+820+953{,}5+875+899{,}6}{15}$$

$$\overline{X} = \frac{9007{,}8}{15} = 600{,}52$$ hiljada dinara

2. U jednoj radnoj smeni za osam časova rada 10 radnika sklapalo je časovnike:

15 10 12 13 9 11 9 14 7 16

U uzorku od 10 radnika izračunajte prosečan broj sklopljenih časovnika.

Rešenje:

$$\overline{X} = \frac{\Sigma xi}{N} = \frac{15+10+12+13+9+11+9+14+7+16}{10} = \frac{116}{10} = 11{,}6$$ časovnika

3. Potrošnja povrća u kg u 15 domaćinstava za jednu godinu iznosila je:

30 26,5 28,2 35 47,1 31,2 27,6 43,3 12 48,5 40 13,7 22,2 45,2 38,4

U uzorku od 15 domaćinstava izračunajte prosečnu godišnju potrošnju povrća.

Rešenje:

$$\overline{X} = \frac{\Sigma xi}{N}$$

$$\overline{X} = \frac{30+26{,}5+28{,}2+35+47{,}1+31{,}2+27{,}6+43{,}3+12+48{,}5+40+13{,}7+22{,}2+45{,}2+38{,}4}{15}$$

$$\overline{X} = \frac{488{,}9}{15} = 35{,}59$$ kilograma

4. Dati su podaci o broju feleričnih proizvoda:

6 7 8 10 15 6 7 15 10 8 6 7 15 6 8 10 7 15 10 8 7 15 10 6 8 7 10

Na osnovu proste distribucije frekvencija izračunajte prosečan broj feleričnih proizvoda.

Rešenje:

x	f	x*f
6	5	30
7	6	42
8	5	40
10	6	60
15	5	75
Σ	27	247

$$\overline{X} = \frac{\Sigma fixi}{N=\Sigma fi} = \frac{247}{27} = 9{,}15 \text{ proizvoda}$$

5. Na osnovu podataka o broju lukovica po m^2 zemljišta formirajte intervalnu seriju podataka i izračunajte prosečan broj lukovica po m^2.

3 5 6 8 4 3 3 5 9 7 10 12 14 5 11 12 20 22 42 41 35 32 26 24 25

23 28 29 27 33 38 36 37 32 17 39 34 35 25 26 40 41 39 26 27 18

Rešenje:

K=1+3,3logN=1+3,3log46=1+3,3*1,663=1+5,49=6,49≈7 broj reda

$$i = \frac{xmax - xmin}{k} = \frac{42 - 3}{7} = \frac{39}{7} = 5{,}57 \approx 6 \text{ širina intervala}$$

x	f	xs	f*xs
3 - 9	11	6	66
9,1 - 15	5	12	60
15,1 - 21	3	18	54
21,1 - 27	10	24	240
27,1 - 33	5	30	150
33,1 - 39	8	36	288
39,1 - 45	4	42	168
Σ	46	-	1026

$$\overline{X} = \frac{\Sigma fixi}{N=\Sigma fi}$$

$$\overline{X} = \frac{1026}{46} = 22{,}30 \text{ lukovica po } m^2$$

6. Na osnovu prikupljenih podataka o produktivnosti radnika koja je izražena u broju proizvedenih proizvoda po jednoj smeni izračunajte geometrijsku sredinu.

23 27 32 38 21 19 20 25 29

Rešenje:

Radnici	Broj proizvoda	log (x)
1	23	1,362
2	27	1,431
3	32	1,505
4	38	1,580
5	21	1,322
6	19	1,279
7	20	1,301
8	25	1,398
9	29	1,462
Σ	-	12,6404

$$G = N\frac{\Sigma \log x}{n} = N\frac{12,6404}{9}$$

$$G = N\,1,40448 = 25,38 \text{ proizvoda}$$

7. Potrošnja posetilaca jednog ugostiteljskog objekta data je u narednoj tabeli.

Potrošnja (X)	170,1-200	220,1-230	230,1-260	260,1-290	290,1-320
Broj turista (f_i)	10	18	35	50	42

Geometrijskom sredinom izračunajte prosečnu potrošnju u ugostiteljskom objektu.

Rešenje:

x	f	Xs	log(x)	f*log(x)
170,1-200	10	185	2,267	22,67
200,1-230	18	215	2,332	41,98
230,1-260	35	245	2,389	83,62
260,1-290	50	275	2,439	121,97
290,1-320	42	305	2,484	104,34
Σ	155	-	-	374,58

$$G = N\frac{\Sigma f \log x}{\Sigma f}$$

$$G = N\frac{374,58}{155}$$

$$G = N\,2,41666$$

$$G = 261,02$$

8. Na osnovu podataka o produktivnosti radnika u tri preduzeća koji su dati u nastavku izračunajte prosečnu produktivnost rada.

25h, 32h, 50 h i 62 h

Rešenje:

$$H=\frac{n}{\Sigma\frac{1}{xi}}=\frac{4}{\frac{1}{25}+\frac{1}{32}+\frac{1}{50}+\frac{1}{62}}=\frac{4}{0{,}040+0{,}031+0{,}020+0{,}016}$$

$$H=\frac{4}{0{,}10738}=37{,}25 \text{ časova}$$

9. Na osnovu podataka o broju psihologa na 10.000 stanovnika u jednom gradu izračunajte prosečan broj psihologa pomoću harmonijske sredine.

5 psihologa, 12 psihologa, 15 psihologa, 7 psihologa

Rešenje:

$$H=\frac{n}{\Sigma\frac{1}{xi}}=\frac{4}{\frac{1}{5}+\frac{1}{12}+\frac{1}{15}+\frac{1}{7}}=\frac{4}{0{,}200+0{,}083+0{,}067+0{,}143}$$

$$H=\frac{4}{0{,}49286}=8{,}12 \text{ psihologa/10.000 stanovnika}$$

10. Prilikom dostave pice dva motora pređu 1 km za 8 minuta, dva za 10 minuta, a tri za 12 minuta. Izračunajte prosečnu brzinu ovih motora.

Rešenje:

$$H=\frac{n}{\Sigma\frac{fi}{xi}}=\frac{7}{\frac{2}{8}+\frac{2}{10}+\frac{3}{12}}=\frac{7}{0{,}25+0{,}2+0{,}25}$$

$$H=\frac{7}{0{,}7}=10 \text{ minuta/kilometru}$$

11. Na osnovu podataka o ostvarenom dnevnom prometu u 30 ugostiteljskih objekata izračunajte modus.

Promet u 1000 dinara	10,1-15	15,1-20	20,1-25	25,1-30	30,1-35
Broj ugostiteljskih objekata	7	9	5	6	3

Rešenje:

Položaj modusa određujemo tako što pronađemo najveću frekvenciju.

$$Mo = l + \frac{f2 - f1}{(f2 - f1)+(f2-f3)} *i = 15{,}1 + \frac{9-7}{(9-7)+(9-5)} * 5 \quad Mo=16{,}77$$

Najveći broj ugostiteljskih objekata ima promet 16.770 dinara.

12. Sedam poljoprivrednih gazdinstava poseduje po jednu kravu. Svaka od njih daje različitu količinu mleka:

20 l, 25 l, 19 l, 23 l, 27 l, 15 l, 30 l.

Odredite medijanu.

Rešenje:

Položaj medijane= (7+1)/2 = 4 član uređenog niza po veličini

15 19 20 23 25 27 30

Me = 23 Polovina krava daje manje od 23 litara mleka, a druga polovina više.

13. Izračunajte medijanu na osnovu podataka o mesečnoj potrošnji vode po domaćinstvima.

15 m^3 18 m^3 20 m^3 17 m^3 24 m^3 26 m^3 29 m^3 30 m^3

Rešenje:

Položaj medijane= (8+1)/2 = 4,5 član uređenog niza po veličini

15 17 18 <u>20 24</u> 26 29 30

Me=(20+24)/2=22 m^3

14. Na osnovu podataka o potrošnji soli po domaćinstvima u kilogramima odredite medijanu.

Potrošnja soli (x)	9	10	12	13	14	15
Broj domaćinstava (f_i)	4	7	10	9	8	11

Rešenje:

X	f	Kumulativ "ispod"
9	4	4
10	7	11
12	10	21
13	9	30
14	8	38
15	11	49
Σ	49	-

Položaj medijane= (49+1)/2 = 25 član;

Me=13kg

Polovina domaćinstava ima potrošnju soli manju od 13 kg, a druga polovina veću.

15. U narednoj tabeli dat je prikaz ispunjenja norme u % za 40 radnika preduzeća koje proizvodi kablove. Na osnovu tih podataka odredite medijanu.

% Izvršenja norme (X)	79,1-84	84,1-89	89,1-94	94,1-99	99,1-104,1
Broj radnika (f_i)	4	5	15	10	5

Rešenje:

x	f	Kumulativ "ispod"
79,1-84	4	4
84,1-89	5	9
89,1-94	15	24
94,1-99	10	34
99,1-104,1	5	39
Σ	39	-

$$Me = l + \frac{\frac{n}{2} - \Sigma fi<m}{fm} *_i = 89{,}1 + \frac{\frac{39}{2} - 9}{15} * 5$$

Me= 92,6 %

16. Izračunajte interval varijacije na osnovu podataka o dnevnim prinosima mleka po domaćinstvima:

10 l 12,5 l 30 l 26,5 l 25,7 l 16 l 14,8 l 17,9 l 24,5 l 10,9 l

Rešenje:

$$R = x_{max} - x_{min} = 30 - 10 = 20 \text{ l mleka}$$

Razlika u prinosima mleka između domaćinstva koje ima najveće prinose i domaćinstva koje ima najmanje prinose iznosi 10 litara mleka.

17. Na osnovu podataka u tabeli izračunajte interval varijacije.

x_i	3	5	7	9	12	13
f_i	18	20	50	50	80	65

Rešenje:

$$R = x_{max} - x_{min} = 13 - 3 = 10$$

18. Vreme trajanja pripreme jednog jela u različitim restoranima dato je u tabeli. Izračunajte srednje apsolutno odstupanje.

Vreme pripreme (x_i)	20	23	26	27	30	32
Broj restorana (f_i)	5	6	8	5	6	9

Rešenje:

x	f	x*f	$\lvert xi-\bar{x}\rvert$	$f*\lvert xi-\bar{x}\rvert$
20	5	100	6,89	34,45
23	6	138	3,89	23,34
26	8	208	0,89	7,12
27	5	135	0,11	0,55
30	6	180	3,11	18,66
32	9	288	5,11	45,99
Σ	39	1049	-	130,11

$$\bar{X} = \frac{\sum fixi}{N=\sum fi} = \frac{1049}{39} = 26{,}89$$

$$SD = \frac{\sum fi\,|xi-\bar{X}|}{N} = \frac{130{,}11}{39} = 3{,}37$$

Prosečno apsolutno odstupanje vremena pripreme jela u 39 restorana od prosečnog vremena pripreme jela iznosi 3,37 minuta.

19. Na osnovu podataka o dnevnom prometu restorana odredite srednje apsolutno odstupanje.

Dnevni promet u 10.000 dinara (x)	5,1-10	10,1-15	15,1-20	20,1-25
Broj restorana (f_i)	9	12	15	8

Rešenje:

x	f	xs	x*f	$\lvert xi-\bar{x}\rvert$	$f*\lvert xi-\bar{x}\rvert$
5,1-10	9	7,5	67,5	7,5	67,5
10,1-15	12	12,5	150	2,5	30
15,1-20	15	17,5	262,5	2,5	37,5
20,1-25	8	22,5	180	7,5	60
Σ	44	-	660		195

$$\bar{X} = \frac{\sum fixi}{N=\sum fi} = \frac{660}{44} = 15$$

$$SD = \frac{\sum fi\,|xi-\bar{X}|}{N} = \frac{195}{44} = 4{,}43$$

20. Starost posetilaca jednog turističkog mesta data je u nastavku. Izračunajte srednje apsolutno odstupanje.

Starosti lica u godinama (x)	do 20	20,1-30	30,1-40	40,1-50	50,1-60
Broj posetilaca (f_i)	20	110	90	66	56

Rešenje:

x	f	xs	x*f	lxi-x̄l	f*lxi-x̄l
do 20	20	15	300	20,82	416,4
20,1-30	110	25	2750	10,82	1190,2
30,1-40	90	35	3150	0,82	73,8
40,1-50	66	45	2970	9,18	605,88
50,1-60	56	55	3080	19,18	1074,08
Σ	342	-	12250	-	3360,36

$$\overline{X}=\frac{\sum fixi}{N=\sum fi}=\frac{12250}{342}=35{,}82$$

$$SD=\frac{\sum fi\left|xi-\overline{X}\right|}{N}=\frac{3360{,}36}{342}=9{,}83$$

21. Na osnovu podataka o broju radnika po preduzećima odredite varijansu i standardnu devijaciju.

Broj preduzeća (x_i)	5	6	7	8	11	12
Broj radnika (f_i)	7	6	5	8	9	9

Rešenje:

x	f	x*f	x2	f*x2
5	7	35	25	175
6	6	36	36	216
7	5	35	49	245
8	8	64	64	512
11	9	99	121	1089
12	9	108	144	1296
Σ	44	269	439	3533

$$\overline{X}=\frac{\sum fixi}{N=\sum fi}=\frac{269}{44}=6{,}11$$

$$\sigma^2=\frac{\sum fixi^2}{N}-\overline{X}^2=\frac{3533}{44}-6{,}11^2$$

$$\sigma^2=80{,}29-37{,}33=42{,}96$$

$$\sigma=\sqrt{\sigma^2}=\sqrt{42{,}96}=6{,}55$$

Prosečno kvadratno odstupanje pojedinih vrednosti obeležja od prosečne vrednosti obeležja iznosi 42,96.

Prosečno odstupanje pojedinih vrednosti obeležja od prosečne vrednosti obeležja iznosi 6,55.

22. Izračunaj varijansu i standardnu devijaciju na osnovu podataka koji su dati u narednoj tabeli.

Količina semena (x)	500-549,9	550-599,9	600-649,9	650-699,9	700 i više
Broj parcela (f_i)	9	20	40	60	80

Rešenje:

x	f	xs	xs*f	xs^2	$f*xs^2$
500-549,9	9	525	4725	275625	2480625
550-599,9	20	575	11500	330625	6612500
600-649,9	40	625	25000	390625	15625000
650-699,9	60	675	40500	455625	27337500
700 i više	80	725	58000	525625	42050000
Σ	209	-	139725	-	94105625

$$\bar{X} = \frac{\sum fixi}{N=\sum fi} = \frac{139725}{209} = 668{,}54 \qquad \sigma^2 = \frac{\sum fixi^2}{N} - \bar{X}^2 = \frac{94105625}{209} - 668{,}54^2$$

$$\sigma^2 = 450266{,}1 - 446945{,}7 = 3320{,}417 \qquad \sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{3320{,}417} = 57{,}62$$

Prosečna vrednost posmatranog obeležja iznosi 668,54.

Prosečno kvadratno odstupanje pojedinih vrednosti obeležja od prosečne vrednosti obeležja iznosi 3320,417.

Prosečno odstupanje pojedinih vrednosti obeležja od prosečne vrednosti obeležja iznosi 57,62.

23. Odredite koeficijent varijacije na osnovu podataka o visini investicija po preduzećima.

Visina investicija u 1000 dinara (x)	100-200	200,1-300	300,1-400	400,1-500
Broj preduzeća (f_i)	14	19	25	22

Rešenje:

x	f	xs	xs*f	xs^2	$f*xs^2$
100-200	14	150	2100	22500	315000
200,1-300	19	250	4750	62500	1187500
300,1-400	25	350	8750	122500	3062500
400,1-500	22	450	9900	202500	4455000
Σ	80	-	25500	-	9020000

$$\bar{X} = \frac{\sum fixi}{N=\sum fi} = \frac{25500}{80} = 318{,}75 \qquad \sigma^2 = \frac{\sum fixi^2}{N} - \bar{X}^2 = \frac{9020000}{80} - 318{,}75^2$$

$$\sigma^2 = 112750 - 101601{,}6 = 11148{,}44 \qquad \sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{11148{,}44} = 105{,}59$$

$$V(x)=\frac{\sigma}{\overline{x}}*100\%=\frac{105{,}59}{318{,}75}*100\%=33{,}13\%$$

Prosečna visina investicija iznosi 318 750 dinara.

Prosečno kvadratno odstupanje visine investicija od prosečne visine investicija iznosi 11 148 440 dinara.

Prosečno odstupanje visine investicija od prosečne visine investicija iznosi 105 590 dinara.

Prosečno procentualno odstupanje visine investicija od prosečne visine investicija iznosi 33,13 %.

24. Na osnovu podataka o potrošnji šećera po domaćinstvima odredite asimetriju i spljoštenost rasporeda.

Potrošnja šećera	3-5	5-7	7-9	9-11	11-13	Σ
Br. domaćinstava	4	8	2	6	4	24

Rešenje:

$$\alpha_3=\frac{M^3}{\sigma^3} \qquad \alpha_4=\frac{M^4}{\sigma^4} \qquad Mk=\frac{\sum fi(xi-\overline{X})^k}{N} \qquad \sigma^2=\frac{\sum fi(xi-\overline{X})^2}{N} \qquad \sigma=\sqrt{\sigma^2}$$

x	f	xs	f*xs	$x-\overline{x}$	$(x-\overline{x})^2$	$(x-\overline{x})^3$	$(x-\overline{x})^4$
3-5	4	4	16	-3,83	14,67	-56,18	215,18
5-7	8	6	48	-1,83	3,35	-6,13	11,22
7-9	2	8	16	0,17	0,03	0,00	0,00
9-11	6	10	60	2,17	4,71	10,22	22,17
11-13	4	12	48	4,17	17,39	72,51	302,37
Σ	24	-	188	-	-	-	-

$f*(x-\overline{x})^2$	$f*(x-\overline{x})^3$	$f*(x-\overline{x})^4$
58,68	-224,73	860,71
26,79	-49,03	89,72
0,06	0,01	0,00
28,25	61,31	133,04
69,56	290,05	1209,50
183,33	77,61	2292,97

$$\overline{X}=\frac{188}{24}=7{,}83 \qquad \sigma^2=\frac{\sum fi(xi-\overline{X})^2}{N}=\frac{183{,}33}{24}=7{,}64 \qquad \sigma=\sqrt{\sigma^2}=\sqrt{7{,}64}=2{,}76$$

$$M_3 = \frac{\sum fi(xi-\overline{X})^3}{N} = \frac{77,61}{24} = 3,23 \qquad M_4 = \frac{\sum fi(xi-\overline{X})^4}{N} = \frac{2292,97}{24} = 95,54$$

$$\alpha_3 = \frac{M^3}{\sigma^3} = \frac{3,23}{2,76^3} = \frac{3,23}{21,02} = 0,15 \qquad \alpha_4 = \frac{M^4}{\sigma^4} = \frac{95,54}{2,76^4} = \frac{95,54}{58,03} = 1,65$$

Raspored je pozitivno asimetričan udesno i više je spljošten, a manje izdužen.

25. Na osnovu podataka o prinosu po hektaru za 67 parcela odredite asimetriju i spljoštenost rasporeda.

Prinos po hektaru	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12	12-14	Σ
Br. Parcela	3	17	12	16	15	14	67

Rešenje zadatka prilagoditi po ugledu na prethodni zadatak.

26. Na osnovu podataka o potrošnji vina po domaćinstvima odredite asimetriju i spljoštenost rasporeda.

Potrošnja vina	1-4	4-7	7-10	10-13	13-15	Σ
Br. domaćinstava	4	15	20	11	8	58

Rešenje zadatka prilagoditi po ugledu na prethodni zadatak.

27. Na osnovu podataka o potrošnji ulja po domaćinstvima odredite asimetriju i spljoštenost rasporeda.

Potrošnja ulja	5	7	9	10	12	15	Σ
Br. domaćinstava	12	10	8	7	5	4	46

Rešenje zadatka prilagoditi po ugledu na prethodni zadatak.

28. Na osnovu podataka o potrošnji meda po domaćinstvima odredite asimetriju i spljoštenost rasporeda.

Potrošnja meda (u kg)	1	2	3	4	5	6	Σ
Br. domaćinstava	20	15	23	25	17	10	110

Rešenje zadatka prilagoditi po ugledu na prethodni zadatak.

STATISTIČKO ZAKLJUČIVANJE

1. Na osnovu slučajno odabranog uzorka od 33 domaćinstava u naselju utvrđen je sledeći broj stabala jabuka:

12,5 11,3 16,2 17 20,6 25 21 15,6 18 24,2 27

22 19,2 19 10 11,3 13 26,3 17,6 19 20 14,2

11,5 12,7 17,9 18,2 19,7 20,5 21 23 27 28 28

a) Sa verovatnoćom od 95% odredi interval poverenja za očekivani prosečan broj stabla šljiva u celom naselju.

b) Na osnovu poznatog podatka da je ukupan broj domaćinstava u posmatranom naselju 1000 odredi interval poverenja očekivanog ukupnog broja stabla jabuka.

Rešenje:

$K=1+3{,}3\log N=1+3{,}3\log 33=1+3{,}3*1{,}519=1+5{,}01=6{,}01\approx 6 \qquad \beta=0{,}95$

$\alpha=1-0{,}95=0{,}05 \qquad Z_{1-\alpha/2}=Z_{1-0{,}05/2}=Z_{0{,}975}=1{,}96$

$$i=\frac{xmax - xmin}{k}=\frac{28-10}{6}=\frac{18}{6}=3$$

x	f	xs	xs*f	xs^2	$f*xs^2$
10 - 13	7	11,5	80,5	132,25	925,75
13,1 - 16	2	14,5	29	210,25	420,5
16,1 - 19	8	17,5	140	306,25	2450
19,1 - 21	7	20,5	143,5	420,25	2941,75
21,1 - 24	2	23,5	47	552,25	1104,5
24,1 i više	7	26,5	185,5	702,25	4915,75
Σ	33	-	625,5	-	12758,3

a)

$$\overline{x}=\frac{\Sigma fixi}{N=\Sigma fi}=\frac{625{,}5}{33}=18{,}95 \qquad \sigma^2=\frac{\Sigma fixi^2}{N}-\overline{x}^2=\frac{12758{,}3}{33}-18{,}95^2$$

$$\sigma^2=386{,}62-359{,}10=27{,}52 \qquad \sigma=\sqrt{\sigma^2}=\sqrt{27{,}52}=5{,}25 \qquad \overline{x}=m \qquad \sigma=Sn$$

$$m-Z_{1-\alpha/2}*\frac{Sn}{\sqrt{n-1}}\leq\overline{x}\leq m+Z_{1-\alpha/2}*\frac{Sn}{\sqrt{n-1}}$$

$$18{,}95-1{,}96*\frac{5{,}25}{\sqrt{33-1}}\leq\overline{x}\leq 18{,}95+1{,}96*\frac{5{,}25}{\sqrt{33-1}}$$

$$18{,}95 - 1{,}96 * \frac{5{,}25}{5{,}66} \leq \overline{X} \leq 18{,}95 + 1{,}96 * 0{,}93$$

$$18{,}95 - 1{,}8228 \leq \overline{X} \leq 18{,}95 + 1{,}8228$$

$$17{,}13 \leq \overline{X} \leq 20{,}77$$

b)

$$1000 * 17{,}13 \leq N * \overline{X} \leq 1000 * 20{,}77$$

$$17130 \leq N * \overline{X} \leq 20770$$

Prosečan broj stabala jabuka 18,95. Prosečno odstupanje broja stabala od prosečnog broja stabala iznosi 5,25 stabala. Sa verovatnoćom od 95% može se očekivati da se procečan broj stabala u posmatranom naselju nalazi negde u intervalu od 17,13 do 20,77 stabala. Sa istom verovatnoćom može se očekivati da je ukupan broj stabala jabuka u posmatranom naselju u intervalu od 17130 do 20770 stabala.

2. Na osnovu podataka o mesečnim primanjima zaposlenih (u hiljadama dinara) u fabrikama tekstila na jednom području odredite:

a) Interval poverenja za očekivana prosečna primanja ukoliko je verovatnoća 90%.

b) Ukoliko je ukupan broj zaposlenih u fabrikama tekstila na posmatranom području 2500, odredite koliko je potrebno novca da bi se tim radnicima isplatile mesečne plate.

15 16,5 17,2 18 19,3 15,4 16 20 21,5 26

24,6 25 26 21 17,6 19,4 20,7 23,7 27 27

20 22 25,1 27 25,8 18,9 16,7 15,9 20 24,3

Rešenje:

K=1+3,3logN=1+3,3log30=1+3,3*1,477=1+4,87=5,87≈6

$$i = \frac{xmax - xmin}{k} = \frac{27 - 15}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

x	f	xs	xs*f	xs^2	$f*xs^2$
15 - 17	6	16	96	256	1536
17,1 - 19	4	18	72	324	1296
19,1 - 21	7	20	140	400	2800
21,1 - 23	2	22	44	484	968
23,1 - 25	4	24	96	576	2304
25,1 - 27	7	26	182	676	4732
Σ	30	-	630	-	13636

a) $\beta=0{,}90$ $\alpha=1-0{,}90=0{,}10$ $Z_{1-\alpha/2}=Z_{1-0{,}10/2}=Z_{0{,}95}=1{,}65$

$$\overline{X} = \frac{\sum fixi}{N=\sum fi} = \frac{630}{30} = 21 \qquad \sigma^2 = \frac{\sum fixi^2}{N} - \overline{X}^2 = \frac{13636}{30} - 21^2$$

$$\sigma^2 = 454{,}53 - 441 = 13{,}53 \qquad \sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{13{,}53} = 3{,}68 \qquad \overline{X} = m \qquad \sigma = Sn$$

$$m - Z_{1-\alpha/2} * \frac{Sn}{\sqrt{n-1}} \leq \overline{X} \leq m + Z_{1-\alpha/2} * \frac{Sn}{\sqrt{n-1}}$$

$$21 - 1{,}65 * \frac{3{,}68}{\sqrt{30-1}} \leq \overline{X} \leq 21 + 1{,}65 * \frac{3{,}68}{\sqrt{30-1}}$$

$$21 - 1{,}65 * \frac{3{,}68}{5{,}39} \leq \overline{X} \leq 21 + 1{,}65 * 0{,}68$$

$$21 - 1{,}122 \leq \overline{X} \leq 21 + 1{,}122$$

$$19.878 \leq \overline{X} \leq 22{,}122$$

b)

$$2500 * 19{,}878 \leq N * \overline{X} \leq 2500 * 22{,}122$$

$$49695 \leq N * \overline{X} \leq 55305$$

Prosečna plata na uzorku od 30 radnika iznosi 21 000 dinara. Prosečno odstupanje primanja od prosečnog primanja iznosi 3 680 dinara. Sa verovatnoćom od 90% može se očekivati da se prosečna primanja u posmatranim fabrikama nalaze negde u intervalu od 19 878 do 22 122 dinara. Sa istom verovatnoćom može se očekivati da je ukupan iznos novca neophodan za isplatu mesečne plate u intervalu od 4 9695 000 do 55 305 000 dinara.

3. Na osnovu evidencije o broju izostanaka radnika sa posla u danima sa verovatnoćom od 98% odredi:

5 7 6 9 8 10 12 22 15 12 13 18 17 11 21

7 9 6 16 14 13 20 4 5 21 20 19 17 17 16

a) Interval poverenja za prosečan broj izostanaka sa posla izražen u danima.

b) Ukupan broj dana koji su radnici izostajali sa posla ukoliko je ukupan broj zaposlenih 2000 radnika.

Rešenje:

$$K = 1 + 3{,}3\log N = 1 + 3{,}3\log 30 = 1 + 3{,}3 * 1{,}477 = 1 + 4{,}87 = 5{,}87 \approx 6$$

$$i = \frac{xmax - xmin}{k} = \frac{22 - 4}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

x	f	xs	xs*f	xs^2	$f*xs^2$
4 - 7	7	5,5	38,5	30,25	211,75
7,1 - 10	4	8,5	34	72,25	289
10,1 - 13	5	11,5	57,5	132,25	661,25
13,1 - 16	4	14,5	58	210,25	841
16,1 - 19	5	17,5	87,5	306,25	1531,25
19,1 i više	5	20,5	102,5	420,25	2101,25
Σ	30	-	378	-	5635,5

a) $\beta=0{,}98$ $\alpha=1-0{,}98=0{,}02$ $Z_{1-\alpha/2}=Z_{1-0{,}02/2}=Z_{0{,}99}=2{,}33$

$$\overline{X}=\frac{\Sigma fixi}{N=\Sigma fi}=\frac{378}{30}=12{,}6 \qquad \sigma^2=\frac{\Sigma fixi^2}{N}-\overline{X}^2=\frac{5635{,}5}{30}-12{,}6^2$$

$$\sigma^2=187{,}85-158{,}76=29{,}09 \quad \sigma=\sqrt{\sigma^2}=\sqrt{29{,}09}=5{,}39 \quad \overline{X}=m \quad \sigma=Sn$$

$$m-Z_{1-\alpha/2}*\frac{Sn}{\sqrt{n-1}}\leq\overline{X}\leq m+Z_{1-\alpha/2}*\frac{Sn}{\sqrt{n-1}}$$

$$12{,}6-2{,}33*\frac{5{,}39}{\sqrt{30-1}}\leq\overline{X}\leq 12{,}6+2{,}33*\frac{5{,}39}{5{,}39}$$

$$12{,}6-2{,}33\leq\overline{X}\leq 12{,}6+2{,}33$$

$$10{,}27\leq\overline{X}\leq 14{,}93$$

b)

$$2000*10{,}27\leq N*\overline{X}\leq 2000*14{,}93$$

$$20540\leq N*\overline{X}\leq 29860$$

Prosečan broj dana koji su radnici izostajali sa posla iznosi 12,6 dana. Prosečno odstupanje broja dana od prosečne vrednosti iznosi 5,39 dana. Sa verovatnoćom od 98% može se očekivati da se prosečan broj dana koji su radnici izostajali sa posla nalazi negde u intervalu od 10,27 do 14,93 dana. Sa istom verovatnoćom može se očekivati da je ukupan broj dana koji su radnici izostajali sa posla u intervalu od 20540 do 29860 dana.

4. Na osnovu podataka u datoj tabeli odredi:/

Površina u ha (x_i)	**4**	**6**	**8**	**9**	**10**	**11**
Broj domaćinstava (f_i)	**6**	**8**	**15**	**25**	**32**	**17**

a) Interval poverenja prosečne površine oranica u okrugu, ako je verovatnoća 98%.

b) Na osnovu saznanja da je ukupan broj domaćinstava u posmatranom okrugu 1500 odredi u kom intervalu se može naći ukupna površina pod oranicama.

Rešenje:

X	f	x*f	x2	x2*f
4	6	24	16	96
6	8	48	36	288
8	15	120	64	960
9	25	225	81	2025
10	32	320	100	3200
11	17	187	121	2057
∑	103	924	-	8626

a) $\beta=0{,}98$ $\alpha=1-0{,}98=0{,}02$ $Z_{1-\alpha/2}=Z_{1-0{,}02/2}=Z_{0{,}99}=2{,}33$

$$\overline{X}=\frac{\sum fixi}{N=\sum fi}=\frac{924}{103}=8{,}97 \qquad \sigma^2=\frac{\sum fixi2}{N}-\overline{X}^2=\frac{8626}{103}-8{,}97^2$$

$$\sigma^2=83{,}75-80{,}46=3{,}29 \qquad \sigma=\sqrt{\sigma^2}=\sqrt{3{,}29}=1{,}81 \qquad \overline{X}=m \qquad \sigma=Sn$$

$$m-Z_{1-\alpha/2}*\frac{Sn}{\sqrt{n-1}}\leq\overline{X}\leq m+Z_{1-\alpha/2}*\frac{Sn}{\sqrt{n-1}}$$

$$8{,}97-2{,}33*\frac{1{,}81}{\sqrt{103-1}}\leq\overline{X}\leq 8{,}97+2{,}33*\frac{1{,}81}{10{,}10}$$

$$8{,}97-2{,}33*0{,}1792\leq\overline{X}\leq 8{,}97+0{,}4175$$

$$8{,}5525\leq\overline{X}\leq 9{,}3875$$

b)

$$1500*8{,}5525\leq N*\overline{X}\leq 1500*9{,}3875$$

$$12828{,}75\leq N*\overline{X}\leq 14081{,}25$$

Teorijsko objašnjenje dobijenih rezultata prilagoditi po ugledu na prethodni zadatak.

5. Na osnovu podataka u datoj tabeli odredi:/

Proizvodnja šampita (x_i)	**25**	**28**	**40**	**45**	**50**
Broj zaposlenih (f_i)	**15**	**30**	**25**	**35**	**38**

a) Interval poverenja prosečne proizvodnje šampita u poslastičari, ako je verovatnoća 98%.

b) Na osnovu saznanja da je ukupan broj zaposlenih u poslastičari 800 odredi u kom intervalu se može naći ukupna proizvodnja šampita.

Rešenje:

X	f	x*f	x2	x2*f
25	15	375	625	9375
28	30	840	784	23520
40	25	1000	1600	40000
45	35	1575	2025	70875
50	38	1900	2500	95000
∑	143	5690	-	238770

a) $\beta=0{,}98 \quad \alpha=1-0{,}98=0{,}02 \quad Z_{1-\alpha/2}=Z_{1-0{,}02/2}=Z_{0{,}99}=2{,}33$

$$\overline{x}=\frac{\sum fixi}{N=\sum fi}=\frac{5690}{143}=39{,}79 \qquad \sigma^2=\frac{\sum fixi^2}{N}-\overline{x}^2=\frac{238770}{143}-39{,}79^2$$

$$\sigma^2=1669{,}72-1583{,}24=86{,}48 \quad \sigma=\sqrt{\sigma^2}=\sqrt{86{,}48}=9{,}299 \qquad \overline{x}=m \qquad \sigma=Sn$$

$$m-Z_{1-\alpha/2}*\frac{Sn}{\sqrt{n-1}}\leq\overline{x}\leq m+Z_{1-\alpha/2}*\frac{Sn}{\sqrt{n-1}}$$

$$39{,}79-2{,}33*\frac{9{,}299}{\sqrt{143-1}}\leq\overline{x}\leq 39{,}79+2{,}33*\frac{9{,}299}{11{,}92}$$

$$39{,}79-2{,}33*0{,}78\leq\overline{x}\leq 39{,}79+1{,}8174$$

$$37{,}9726\leq\overline{x}\leq 41{,}6074$$

b)

$$800*8{,}5525\leq N*\overline{x}\leq 800*9{,}3875$$

$$30378{,}08\leq N*\overline{x}\leq 33285{,}92$$

Teorijsko objašnjenje dobijenih rezultata prilagoditi po ugledu na prethodni zadatak.

6. Na osnovu podataka u datoj tabeli odredi:

Broj svinja (x_i)	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Broj domaćinstava (f_i)	**10**	**7**	**9**	**12**	**15**	**3**

a) Interval poverenja prosečne proizvodnje svinja, ako je verovatnoća 95%.

b) Na osnovu saznanja da je ukupan broj domaćinstava 1900 odredi u kom intervalu se može naći ukupna proizvodnja svinja.

Rešenje:

X	f	x*f	x^2	x^2*f
3	10	30	9	90
4	7	28	16	112
5	9	45	25	225
6	12	72	36	432
7	15	105	49	735
8	3	24	64	192
∑	56	304	-	1786

a) $\alpha=1-0{,}95=0{,}05$ $Z_{1-\alpha/2}=Z_{1-0{,}05/2}=Z_{0{,}975}=1{,}96$

$$\overline{X}=\frac{\Sigma fixi}{N=\Sigma fi}=\frac{304}{56}=5{,}43 \qquad \sigma^2=\frac{\Sigma fixi^2}{N}-\overline{X}^2=\frac{1786}{56}-5{,}43^2$$

$$\sigma^2=31{,}89-29{,}48=2{,}41 \qquad \sigma=\sqrt{\sigma^2}=\sqrt{2{,}41}=1{,}55 \qquad \overline{X}=m \qquad \sigma=Sn$$

$$m-Z_{1-\alpha/2}*\frac{Sn}{\sqrt{n-1}}\leq\overline{X}\leq m+Z_{1-\alpha/2}*\frac{Sn}{\sqrt{n-1}}$$

$$5{,}43-1{,}96*\frac{1{,}55}{\sqrt{56-1}}\leq\overline{X}\leq 5{,}43+1{,}96*\frac{1{,}55}{7{,}42}$$

$$5{,}43-1{,}96*0{,}21\leq\overline{X}\leq 5{,}43+0{,}4116$$

$$5{,}0184\leq\overline{X}\leq 5{,}8416$$

b)

$$1900*5{,}0184\leq N*\overline{X}\leq 1900*5{,}8416$$

$$9534{,}96\leq N*\overline{X}\leq 11099{,}04$$

Teorijsko objašnjenje dobijenih rezultata prilagoditi po ugledu na prethodni zadatak.

7. U jednom ugostiteljskom objektu na uzorku od 100 fiskalnih računa utvrđeno je da je prosečan novčani iznos 45 evra, a da prosečno odstupanje pojedinačnih novčanih iznosa na računima od prosečnog iznosa iznosi 10 evra. Odredite interval poverenja za prosečnu vrednost fiskalnih računa u tom restoranu ako je rizik greške 0,05 i 0,07.

Rešenje zadatka prilagoditi po ugledu na prethodni zadatak.

8. Iz jedne proizvodne serije neonskih sijalica uzet je uzorak od 300 komada.

Vreme rada (x_i)	2000	1500	1450	1130	1110
Broj neonskih sijalica (f_i)	50	60	100	70	20

Na osnovu podataka o dužini trajanja rada sijalica odredite interval poverenja za prosečno vreme rada sijalice ukoliko je verovatnoća 99%, a prosečno odstupanje vremena rada sijalica od prosečnog vremena rada za ceo skup 1400 časova.

Rešenje zadatka prilagoditi po ugledu na prethodni zadatak.

9. Na osnovu rezultata kolokvijuma iz jednog predmeta koji su dati u nastavku odredite:

30 25 15 16 27 23 28 17 19 20 21

Sa verovatnoćom od 90% odredi interval poverenja za prosečni rezultat ispita svih studenata.

Rešenje zadatka prilagoditi po ugledu na prethodni zadatak.

10. U preduzeću koje se bavi proizvodnjom ženskih čarapa zaposleno je 1500 ljudi. Slučajnim izborom prikupili smo informacije o visini plate za 500 zaposlenih. Na osnovu dobijenih informacija utvrdili smo da 300 zaposlenih ima veću platu od 2500 dinara.

a) Sa verovatnoćom od 98% oceni procenat učešća zaposlenih sa većom platom od 2500 dinara.

b) Oslanjajući se na isti procenat verovatnoće oceni ukupan broj zaposlenih sa većom platom od 2500 dinara.

Rešenje:

a) $\alpha=1-0{,}98=0{,}02$ $\quad Z_{1-\alpha/2}=Z_{1-0{,}02/2}=Z_{0{,}99}=2{,}33$ $\quad P=\frac{f}{n}=\frac{300}{500}=0{,}6$

$$P - Z_{1-\alpha/2}Sp \le p \le P + Z_{1-\alpha/2}Sp$$

$$0{,}6-2{,}33*\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \le p \le 0{,}6+2{,}33*\sqrt{\frac{0{,}6(1-0{,}6)}{500}}$$

$$0{,}6-2{,}33*\sqrt{\frac{0{,}24}{500}} \le p \le 0{,}6+2{,}33*\sqrt{0{,}00048}$$

$$0{,}6-2{,}33*0{,}0219 \le p \le 0{,}6+2{,}33*0{,}0219$$

$$0{,}6-0{,}05103 \le p \le 0{,}6+0{,}05103$$

$$0{,}54897 \le p \le 0{,}65103$$

b) $$1500*0{,}54897 \le N*p \le 1500*0{,}65103$$

$$823{,}455 \leq N*p \leq 976{,}545$$

Sa pouzdanošću od 98% može se očekivati da se procenat učešća zaposlenih koji imaju veću platu od 2500 dinara nalazi u intervalu od 54,897% do 65,103%. Sa rizikom greške od 2% može se očekivati da se procenat učešća zaposlenih koji imaju veća primanja od 2500 dinara nalazi van intervala između 823,455 i 976,545 zaposlenih.

11. Sa verovatnoćom od 95% oceni interval poverenja za procenat učešća proizvoda sa defektom ukoliko je u uzorku od 900 proizvoda utvrđeno da je 9% proizvoda sa defektom.

Rešenje:

$$\alpha=1-0{,}95=0{,}05 \quad Z_{1-\alpha/2}=Z_{1-0{,}05/2}=Z_{0{,}975}=1{,}96 \qquad p=0{,}09$$

$$P - Z_{1-\alpha/2}Sp \leq p \leq P + Z_{1-\alpha/2}Sp$$

$$0{,}09-1{,}96*\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq p \leq 0{,}09+1{,}96*\sqrt{\frac{0{,}09(1-0{,}09)}{900}}$$

$$0{,}09-1{,}96*\sqrt{\frac{0{,}0819}{900}} \leq p \leq 0{,}09+1{,}96*\sqrt{0{,}000091}$$

$$0{,}09-1{,}96*0{,}0095 \leq p \leq 0{,}09+1{,}96*0{,}0095$$

$$0{,}09-0{,}01862 \leq p \leq 0{,}09+0{,}01862$$

$$0{,}07138 \leq p \leq 0{,}10862$$

Sa pouzdanošću od 95% može se očekivati da se procenat učešća proizvoda sa defektom nalazi u intervalu od 7,138% do 10,862%.

12. U preduzeću sa 7000 zaposlenih slučajno je odabrano 400 njih sa kojima je obavljen razgovor o stresu sa kojim se suočavaju na poslu. Od ukupnog broja anketiranih 123 je izjavilo da im posao izaziva visok nivo stresa.

a) Sa verovatnoćom od 91% oceni interval poverenja u kome se može naći procenat učešća zaposlenih koji su pod stresom na radnom mestu.

b) Izračunajte ukupan broj zaposlenih kojima posao izaziva visok nivo stresa oslanjajući se na isti procenat verovatnoće.

Rešenje:

a) $\alpha=1-0{,}91=0{,}09 \quad Z_{1-\alpha/2}=Z_{1-0{,}09/2}=Z_{0{,}955}=1{,}70 \qquad P=\frac{f}{n}=\frac{123}{400}=0{,}3075$

$$P - Z_{1-\alpha/2}Sp \leq p \leq P + Z_{1-\alpha/2}Sp$$

$$0,31-1,7*\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq p \leq 0,31+1,7*\sqrt{\frac{0,31(1-0,31)}{400}}$$

$$0,31-1,7*\sqrt{\frac{0,2139}{400}} \leq p \leq 0,31+1,7*\sqrt{0,00053}$$

$$0,31-1,7*0,023 \leq p \leq 0,31+1,7*0,023$$

$$0,31-0,0391 \leq p \leq 0,31+0,0391$$

$$0,2709 \leq p \leq 0,3491$$

b) $$7000*0,2709 \leq N*p \leq 7000*0,3491$$

$$1896,3 \leq N*p \leq 2443,7$$

Sa pouzdanošću od 91% može se očekivati da se procenat učešća zaposlenih koji su pod stresom na radnom mestu nalazi u intervalu od 27,09% do 34,91%. Sa rizikom greške od 9% može se očekivati da se procenat učešća zaposlenih koji su pod stresom na radnom mestu nalazi van intervala između 1896,3 i 2443,7 zaposlenih.

13. U pržionici kafe dnevno se pakuje oko 5000 pakovanja kafe težine 100 grama. Na uzorku od 600 pakovanja proveravano je da li kesice kafe zaista imaju 100g koliko je naznačeno na njima i identifikovano je 200 takvih pakovanja.

a) Sa verovatnoćom od 93% oceni interval poverenja u kome se može naći procenat učešća pakovanja kafe koja imaju manju težinu od 100 grama.

b) Izračunajte ukupan broj pakovanja kafe koja imaju manju težinu od naznačene oslanjajući se na isti procenat verovatnoće.

Rešenje:

a) $\alpha=1-0,93=0,07$ $Z_{1-\alpha/2}=Z_{1-0,07/2}=Z_{0,965}=1,82$ $P=\frac{f}{n}=\frac{200}{600}=0,33$

$$P - Z_{1-\alpha/2}Sp \leq p \leq P + Z_{1-\alpha/2}Sp$$

$$0,33-1,82*\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq p \leq 0,33+1,82*\sqrt{\frac{0,33(1-0,33)}{600}}$$

$$0,33-1,82*\sqrt{\frac{0,2211}{600}} \leq p \leq 0,33+1,82*\sqrt{0,00037}$$

$$0,33-1,82*0,0193 \leq p \leq 0,33+1,82*0,0193$$

$$0,33-0,0351 \leq p \leq 0,33+0,0351$$

$$0,2949 \leq p \leq 0,3651$$

b) $$5000*0,2949 \leq N*p \leq 5000*0,3651$$

$$1474,5 \leq N*p \leq 1825,5$$

Teorijsko objašnjenje dobijenih rezultata prilagoditi po ugledu na prethodni zadatak.

14. Iz skupa od 3000 domaćinstava izabran je uzorak od 27 domaćinstava za koja su uzeti podaci o obradivim površinama koje su pod pšenicom:

9 10 13 14 12 9 10 13 14 11 12 12 13

9 10 14 11 12 13 9 10 10 13 14 12 11 14

a) Sa verovatnoćom od 95%, na osnovu proste distribucije frekvencija oceni interval poverenja u kome se može naći prosečna površina obradivog zemljišta koje je pod pšenicom u celom selu.

b) Oslanjajući se na isti procenat verovatnoće izračunajte total osnovnog skupa.

Rešenje:

a) $\alpha=1-0,95=0,05$ $t_{n-1;\alpha/2}= t_{27-1;0,05/2}= t_{26;0,025}=2,0555$ (vrednost iz tablice)

$$\overline{X}=\frac{\Sigma fixi}{N=\Sigma fi}=\frac{314}{27}=11,63 \qquad \sigma^2=\frac{\Sigma fixi^2}{N}-\overline{X}^2=\frac{3732}{27}-11,63^2$$

$$\sigma^2=138,22-135,26=2,96 \qquad \sigma=\sqrt{\sigma^2}=\sqrt{2,96}=1,72 \qquad \overline{X}=m \qquad \sigma=Sn$$

$$m-t_{n-1;\alpha/2}\frac{Sn}{\sqrt{n-1}} \leq \overline{X} \leq m+t_{n-1;\alpha/2}\frac{Sn}{\sqrt{n-1}}$$

$$11,63-2,0555*\frac{1,72}{\sqrt{27-1}} \leq \overline{X} \leq 11,63+2,0555*\frac{1,72}{\sqrt{27-1}}$$

$$11,63-2,0555*\frac{1,72}{5,099} \leq \overline{X} \leq 11,63+2,0555*0,337$$

$$11,63-0,69 \leq \overline{X} \leq 11,63+0,69$$

$$10,94 \leq \overline{X} \leq 12,32$$

b) $$3000*10,94 \leq N*\overline{X} \leq 3000*12,32$$

$$32820 \leq N*\overline{X} \leq 36960$$

Prosečna vrednost obradive površine pod pšenicom iznosi 11,63 ha. Prosečno odstupanje obradivih površina od prosečne vrednosti iznosi 1,72ha. Sa verovatnoćom od 95% može se očekivati da se prosečna vrednost obradivih površina nalazi negde u intervalu od 10,94 do 12,32ha. Sa istom verovatnoćom može se očekivati da je ukupna vrednost obradive površine pod pšenicom u intervalu od 32820 do 36960.

15. U preduzeću sa 210 zaposlenih radnika praćena je produktivnost rada za 20 zaposlenih. Oni su za jedan čas uspeli da proizvedu sledeći broj pari patika:

8 12 12 12 13 13 13 14 14 14

15 15 15 15 15 16 16 16 8 8

a) Sa verovatnoćom od 99%, a na osnovu proste distribucije frekvencija oceni interval poverenja u kome se može naći prosečna proizvodnja patika.

b) Oslanjajući se na isti procenat verovatnoće izračunajte total osnovnog skupa.

Rešenje:

x	f	x*f	x^2	x^2*f
8	3	24	64	192
12	3	36	144	432
13	3	39	169	507
14	3	42	196	588
15	5	75	225	1125
16	3	48	256	768
∑	20	264	-	3612

a) $\alpha=1-0{,}99=0{,}01$ $\quad t_{n-1;\alpha/2}= t_{20-1;0,01/2}= t_{19;0,005}=2{,}8609$ (vrednost iz tablice)

$$\bar{x} = \frac{\sum fixi}{N=\sum fi} = \frac{264}{20} = 13{,}2 \qquad \sigma^2 = \frac{\sum fixi^2}{N} - \bar{x}^2 = \frac{3612}{20} - 13{,}2^2$$

$$\sigma^2 = 180{,}6 - 174{,}24 = 6{,}36 \qquad \sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{6{,}36} = 2{,}52 \qquad \bar{x} = m \qquad \sigma = Sn$$

$$m - t_{n-1;\alpha/2}\frac{Sn}{\sqrt{n-1}} \leq \bar{X} \leq m + t_{n-1;\alpha/2}\frac{Sn}{\sqrt{n-1}}$$

$$12{,}3 - 2{,}8609 * \frac{2{,}52}{\sqrt{20-1}} \leq \bar{X} \leq 12{,}3 + 2{,}8609 * \frac{2{,}52}{\sqrt{20-1}}$$

$$12{,}3 - 2{,}8609 * \frac{2{,}52}{4{,}36} \leq \bar{X} \leq 12{,}3 + 2{,}8609 * 0{,}578$$

$$12{,}3 - 1{,}65 \leq \bar{X} \leq 12{,}3 + 1{,}65$$

$$10{,}65 \leq \overline{x} \leq 13{,}95$$

b) $$210 * 10{,}65 \leq N * \overline{x} \leq 210 * 13{,}95$$

$$2236{,}5 \leq N * \overline{x} \leq 2929{,}5$$

Teorijsko objašnjenje dobijenih rezultata prilagoditi po ugledu na prethodni zadatak.

16. Za osmi mart u prodavnicama je prodat sledeći broj bombonjera:

Broj bombonjera (x_i)	6	8	10	12	15	Σ
Broj prodavnica (f_i)	**3**	**6**	**8**	**5**	**6**	**28**

a) Sa verovatnoćom od 90% oceni interval poverenja u kome se može naći prosečna proizvodnja patika.

b) Oslanjajući se na isti procenat verovatnoće izračunajte total osnovnog skupa ako je ukupan broj prodavnica 520.

Rešenje:

x	f	x*f	x^2	x^2*f
6	3	18	36	108
8	6	48	64	384
10	8	80	100	800
12	5	60	144	720
15	6	90	225	1350
∑	28	296	-	3362

a) $\alpha=1-0{,}90=0{,}1$ $t_{n-1;\alpha/2}= t_{28-1;0,1/2}= t_{27;0,05}=1{,}7033$ (vrednost iz tablice)

$$\overline{x} = \frac{\sum fixi}{N=\sum fi} = \frac{296}{28} = 10{,}57 \qquad \sigma^2 = \frac{\sum fixi^2}{N} - \overline{x}^2 = \frac{3362}{28} - 10{,}57^2$$

$$\sigma^2 = 120{,}07 - 111{,}72 = 8{,}35 \quad \sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{8{,}35} = 2{,}89 \qquad \overline{x} = m \qquad \sigma = Sn$$

$$m - t_{n-1;\alpha/2}\frac{Sn}{\sqrt{n-1}} \leq \overline{x} \leq m + t_{n-1;\alpha/2}\frac{Sn}{\sqrt{n-1}}$$

$$10{,}57 - 1{,}7033 * \frac{2{,}89}{\sqrt{28-1}} \leq \overline{x} \leq 10{,}57 + 1{,}7033 * \frac{2{,}89}{\sqrt{28-1}}$$

$$10{,}57 - 1{,}7033 * \frac{2{,}89}{5{,}196} \leq \overline{x} \leq 10{,}57 + 1{,}7033 * 0{,}556$$

$$10{,}57 - 0{,}95 \leq \overline{x} \leq 10{,}57 + 0{,}95$$

$$9{,}62 \leq \overline{x} \leq 11{,}52$$

b) $520*9{,}62 \leq N*\overline{x} \leq 520*11{,}52$

$$5002{,}4 \leq N*\overline{x} \leq 5990{,}4$$

Teorijsko objašnjenje dobijenih rezultata prilagoditi po ugledu na prethodni zadatak.

17. Od ukupno 700 turista koliko boravi u hotelu, anketirano je 25 o njihovim vanpansionskim troškovima.

Vanpansionska potrošnja (x_i)	**250,1-300**	**300,1-350**	**350,1-400**	**400,1-500**	**Σ**
Broj turista (f_i)	**2**	**7**	**13**	**3**	**25**

a) Sa verovatnoćom od 95% oceni interval poverenja u kome se može naći prosečna dnevna vanpansionska potrošnja.

b) Oslanjajući se na isti procenat verovatnoće izračunajte total osnovnog skupa.

Rešenje:

x	f	Xs	x*f	x^2	x^2*f
250,1-300	2	275	550	75625	151250
300,1-350	7	325	2275	105625	739375
350,1-400	13	375	4875	140625	1828125
400,1-500	3	425	1275	180625	541875
∑	25	-	8975	-	3260625

a) $\alpha=1-0{,}95=0{,}05$ $t_{n-1;\alpha/2}= t_{25-1;0{,}05/2}= t_{24;0{,}025}=2{,}0639$ (vrednost iz tablice)

$$\overline{x} = \frac{\sum fixi}{N=\sum fi} = \frac{8975}{25} = 359 \qquad \sigma^2 = \frac{\sum fixi^2}{N} - \overline{x}^2 = \frac{3260625}{25} - 359^2$$

$$\sigma^2 = 130425-128881=1544 \qquad \sigma=\sqrt{\sigma^2}=\sqrt{1544}=39{,}29 \qquad \overline{x}=m \qquad \sigma=Sn$$

$$m - t_{n-1;\alpha/2}\frac{Sn}{\sqrt{n-1}} \leq \overline{x} \leq m + t_{n-1;\alpha/2}\frac{Sn}{\sqrt{n-1}}$$

$$359-2{,}0639*\frac{39{,}29}{\sqrt{25-1}} \leq \overline{x} \leq 359+2{,}0639*\frac{39{,}29}{\sqrt{25-1}}$$

$$359-2{,}0639*\frac{39{,}29}{4{,}899} \leq \overline{x} \leq 359+2{,}0639*8{,}02$$

$$359 - 16{,}55 \leq \overline{x} \leq 359 + 16{,}55$$

$$342{,}45 \leq \overline{x} \leq 375{,}55$$

b) $700*342{,}45 \leq N*\overline{x} \leq 700*375{,}55$

$$239715 \le N^* \bar{x} \le 262885$$

Teorijsko objašnjenje dobijenih rezultata prilagoditi po ugledu na prethodni zadatak.

18. Odredite interval poverenja za prosečno vreme čekanja u redu na bankomatu ako je rizik greške 5%, a vreme čekanja u odabranom uzorku sledeće: 0 3 6 4 0,25 0,75 0,90 sekundi.

Rešenje zadatka prilagoditi po ugledu na prethodni zadatak.

19. U preduzeću koje se bavi proizvodnjom majica zaposleno je 1000 ljudi. Slučajnim izborom prikupili smo informacije o visini plate za 20 zaposlenih. Na osnovu dobijenih informacija utvrdili smo da 12 zaposlenih ima veću platu od 3000 dinara.

a) Sa verovatnoćom od 95% oceni procenat učešća zaposlenih sa većom platom od 3000 dinara.

b) Oslanjajući se na isti procenat verovatnoće oceni ukupan broj zaposlenih sa većom platom od 3000 dinara.

Rešenje:

a) α=1-0,95=0,05 $t_{n-1;\alpha/2}= t_{20-1;0,05/2}= t_{19;0,025}$=2,0930 (vrednost iz tablice)

$$P = \frac{f}{n} = \frac{12}{20} = 0,6 \qquad P - t_{n-;\alpha/2} * Sp \le p \le P + t_{n-;\alpha/2} * Sp$$

$$0,6-2,0930^* \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \le p \le 0,6+2,0930^* \sqrt{\frac{0,6(1-0,6)}{20}}$$

$$0,6-2,0930^* \sqrt{\frac{0,24}{20}} \le p \le 0,6-2,0930^* \sqrt{0,012}$$

$$0,6-2,0930^*0,1096 \le p \le 0,6-2,0930^*0,1096$$

$$0,6-0,2294 \le p \le 0,6+0,2294$$

$$0,3706 \le p \le 0,8294$$

b) $$1000^*0,3706 \le N^* p \le 1000^*0,8294$$

$$370,6 \le N^* p \le 829,4$$

Sa pouzdanošću od 95% može se očekivati da se procenat učešća zaposlenih koji imaju veću platu od 3000 dinara nalazi u intervalu od 37,06% do 82,94%. Sa rizikom greške od 5% može se očekivati da se procenat učešća zaposlenih koji imaju veću platu od 3000 dinara nalazi van intervala između 370,6 i 829,4 zaposlenih.

20. U voćnjaku od 600 stabala šljiva odabrano je 40 stabala sa kojih je ubrana sledeća količina šljiva:

20 15 13 16 17 13 15 20 17 13 15 15 20 20 15 15 13 17 17 17

13 13 20 20 15 15 13 13 20 20 15 20 20 13 17 17 13 20 20 20

a) Sa verovatnoćom od 95% ispitaj hipotezu da li je procečan prinos po jednom stablu 19 kg.

b) Sa istom verovatnoćom ispitaj pretpostavku da li je prosečan prinos šljiva po stablu manji od 16 kg.

c) Sa istom verovatnoćom ispitaj pretpostavku da li je prosečan prinos šljiva po stablu veći od 18 kg.

Rešenje:

X	f	x*f	x^2	x^2*f
13	10	130	169	1690
15	9	135	225	2025
16	1	16	256	256
17	7	119	289	2023
20	13	260	400	5200
∑	40	660	-	11194

$$\overline{X} = \frac{\sum fixi}{N=\sum fi} = \frac{660}{40} = 16{,}5 \qquad \sigma^2 = \frac{\sum fixi^2}{N} - \overline{X}^2 = \frac{11194}{40} - 16{,}5^2$$

$$\sigma^2 = 279{,}85 - 272{,}25 = 7{,}6 \qquad \sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{7{,}6} = 2{,}76 \qquad \overline{X} = m \qquad \sigma = Sn$$

a) α=1-0,95=0,05

1. Ho ($\overline{X}$=19) H_1 ($\overline{X}\neq$19)
2. n=40>30 koristimo Z test
3. α=1-0,95=0,05 $Z_{1-\alpha/2} = Z_{1-0,05/2} = Z_{1-0,025} = Z_{0,975}$ =1,96 (vrednost iz tablice)
4. Ho se prihvata za |Z|<1,96
   Ho se odbacuje za |Z|≥1,96
5. $$Z = \frac{m-\overline{X}_o}{Sn}\sqrt{n-1} = \frac{16{,}5-19}{2{,}76}\sqrt{40-1} = \frac{-2{,}5}{0{,}4423} = -5{,}65$$
6. |Z|= 5,65>1,96 H_1 se prihvata, tvrdnja nije tačna. Prosečan prinos po stablu šljiva ne iznosi 19 kg.

b) α=1-0,95=0,05

1. Ho ($\overline{X}\geq$16) H_1 ($\overline{X}$<16)
2. n=40>30 koristimo Z test
3. $-Z_{1-\alpha} = -Z_{1-0,05} = -Z_{0,95}$= -1,65 (vrednost iz tablice)
4. Ho se prihvata za Z> -1,65

Ho se odbacuje za Z≤ -1,65

5. $Z = \frac{m-\overline{X}o}{Sn}\sqrt{n-1} = \frac{16{,}5-16}{2{,}76}\sqrt{40\text{-}1} = \frac{0{,}5}{0{,}4423} = 1{,}13$

6. Z=1,13> -1,65 Ho se prihvata, naša tvrdnja nije tačna. Prosečan prinos po stablu šljiva veći je od 16kg.

c) α=1-0,95=0,05

1. Ho ($\overline{X}$≤18) H_1 ($\overline{X}$>18)
2. n=40>30 koristimo Z test
3. $Z_{1-\alpha}= Z_{1-0,05}= Z_{0,95}$= 1,65 (vrednost iz tablice)
4. Ho se prihvata za Z< 1,65
   Ho se odbacuje za Z≥ 1,65

5. $Z = \frac{m-\overline{X}o}{Sn}\sqrt{n-1} = \frac{16{,}5-18}{2{,}76}\sqrt{40\text{-}1} = \frac{-1{,}5}{0{,}4423} = -3{,}39$.

6. Z= -3,39< 1,65 Ho se prihvata, tvrdnja nije tačna. Prosečan prinos po stablu šljiva nije veći od 18kg.

21. Na uzorku od 80 radnika koji rade na lemljenu metalnih delova ispitaj sledeće pretpostavke:

Vreme izrade jednog dela u minutima (x_i)	**15,1-20**	**20,1-25**	**25,1-30**	**30,1-35**	**Σ**
Broj radnika (f_i)	**15**	**30**	**25**	**10**	**80**

a) Sa verovatnoćom od 95% ispitaj hipotezu da li je prosečno vreme izrade jednog proizvoda 23 minuta.

b) Sa istom verovatnoćom ispitaj pretpostavku da li je prosečno vreme izrade jednog proizvoda manje od 26 minuta.

c) Sa istom verovatnoćom ispitaj pretpostavku da li je prosečno vreme izrade jednog proizvoda veće od 24 minuta.

Rešenje:

x	f	x_s	x_s*f	x_s^2	x_s^2*f
15,1-20	15	17,5	262,5	306,3	4593,75
20,1-25	30	22,5	675	506,3	15187,5
25,1-30	25	27,5	687,5	756,3	18906,3
30,1-35	10	32,5	325	1056	10562,5
∑	80	-	1950	-	49250

$\overline{X} = \frac{\sum fixi}{N=\sum fi} = \frac{1950}{80} = 24{,}38$ $\sigma^2 = \frac{\sum fixi^2}{N} - \overline{X}^2 = \frac{49250}{80} - 24{,}38^2$

σ^2=615,63-594,38=21,25 $\quad \sigma=\sqrt{\sigma^2}=\sqrt{21,25}$=4,61 $\quad \overline{X}=m \quad \sigma=Sn$

a) α=1-0,95=0,05

1. Ho ($\overline{X}$=23) H$_1$ ($\overline{X}$≠23)
2. n=80>30 koristimo Z test
3. α=1-0,95=0,05 $Z_{1-\alpha/2}= Z_{1-0,05/2}= Z_{1-0,025}= Z_{0,975}$ =1,96 (vrednost iz tablice)
4. Ho se prihvata za |Z|<1,96
   Ho se odbacuje za |Z|≥1,96
5. $$Z=\frac{m-\overline{X}o}{Sn}\sqrt{n-1}=\frac{24,38-23}{4,61}\sqrt{80-1}=\frac{1,38}{0,5186}=2,66$$
6. |Z|= 2,66>1,96 H$_1$ se prihvata, tvrdnja nije tačna. Prosečno vreme izrade jednog dela ne iznosi 23 minuta.

b) α=1-0,95=0,05

1. Ho ($\overline{X}$≥26) H$_1$ ($\overline{X}$<26)
2. n=80>30 koristimo Z test
3. $-Z_{1-\alpha}= -Z_{1-0,05}= -Z_{0,95}$= -1,65 (vrednost iz tablice)
4. Ho se prihvata za Z> -1,65
   Ho se odbacuje za Z≤ -1,65
5. $$Z=\frac{m-\overline{X}o}{Sn}\sqrt{n-1}=\frac{24,38-26}{4,61}\sqrt{80-1}=\frac{-1,62}{0,5186}=-3,12$$
6. Z= -3,12< -1,65 H$_1$ se prihvata, naša tvrdnja je tačna. Prosečno vreme izrade jednog dela manje je od 26 minuta.

c) α=1-0,95=0,05

1. Ho ($\overline{X}$≤24) H$_1$ ($\overline{X}$>24)
2. n=80>30 koristimo Z test
3. $Z_{1-\alpha}= Z_{1-0,05}= Z_{0,95}$= 1,65 (vrednost iz tablice)
4. Ho se prihvata za Z< 1,65
   Ho se odbacuje za Z≥ 1,65
5. $$Z=\frac{m-\overline{X}o}{Sn}\sqrt{n-1}=\frac{24,38-24}{4,61}\sqrt{80-1}=\frac{0,38}{0,5186}=0,73$$
6. Z= 0,73< 1,65 Ho se prihvata, tvrdnja nije tačna. Prosečno vreme izrade jednog dela nije veće od 24 minuta.

22. Na uzorku od 60 mašina utvrđeno je da je prosečno vreme rada mašine 1600 časova, dok je standardna devijacija 160 časova. Sa rizikom greške od 5% testirajte hipotezu:
a) Da je prosečno vreme rada mašine 1900 časova.
b) Da je prosečno vreme rada mašine manje od 2000 časova.
v) Da je prosečno vreme rada mašine veće od 1800 časova.

Rešenje zadatka prilagoditi po ugledu na prethodni zadatak.

23. Mašina reže daske debljine 90 mm. Na uzorku od 28 dasaka proverite da li mašina dobro radi. Aritmetička sredina je 88 mm, a standardna devijacija 3 mm. Sa rizikom greške od 5% testirajte hipotezu da su daske propisane debljine.

Rešenje zadatka prilagoditi po ugledu na prethodni zadatak.

24. Prosečan broj zaposlenih radnika u vodovodu je 10. Na uzorku od 25 vodovoda standardna devijacija je 2 radnika. Testirajte hipotezu da je prosečan broj radnika 12 ukoliko je rizik greške 5%.

Rešenje zadatka prilagoditi po ugledu na prethodni zadatak.

25. Na uzorku od 500 igrački za decu na baterije ustanovljeno je da su 96 neispravne.

a) Sa verovatnoćom od 95% ispitaj hipotezu da li je ukupan procenat neispravnih baterija 35%.

b) Sa istom verovatnoćom ispitaj pretpostavku da li je ukupan procenat neispravnih baterija manji od 40%.

c) Sa istom verovatnoćom ispitaj pretpostavku da li je ukupan procenat neispravnih baterija veći od 39%.

Rešenje:

a)

$$P = \frac{f}{n} = \frac{96}{500} = 0{,}19$$

1. Ho (p=0,35) H1 (p≠0,35) 35/100=0,35
2. n=500>30 koristimo Z test
3. $Z_{1-\alpha/2} = Z_{1-0,05/2} = Z_{1-0,025} = Z_{0,975} = 1{,}96$ (vrednost iz tablice)
4. Ho se prihvata za |Z|<1,96
   Ho se odbacuje za |Z|≥1,96
5. $$Z = \frac{P-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0{,}19-0{,}35}{\sqrt{\frac{0{,}35(1-0{,}35)}{500}}} = \frac{-0{,}16}{\sqrt{0{,}00046}} = \frac{-0{,}16}{0{,}0214} = 7{,}48$$
6. |Z|= 7,48 > 1,96 pa se Ho odbacuje što znači da naša pretpostavka nije tačna. Procenat učešća neispravnih baterija ne iznosi 35%.

b)
1. Ho (p≥0,40) H1 (p<0,40) 40/100=0,40
2. n=500>30 koristimo Z test
3. $-Z_{1-\alpha} = -Z_{1-0,05} = -Z_{0,95} = -1{,}65$ (vrednost iz tablice)
4. Ho se prihvata za Z> -1,65
   Ho se odbacuje za Z≤ -1,65

5. $$Z = \frac{p-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0{,}19-0{,}40}{\sqrt{\frac{0{,}40(1-0{,}40)}{500}}} = \frac{-0{,}21}{\sqrt{0{,}00048}} = \frac{-0{,}21}{0{,}0219} = -9{,}59$$

Z= -9,59 < -1,65 pa se H_1 prihvata što znači da je naša pretpostavka tačna. Procenat učešća neispravnih baterija iznosi manje od 40%.

c)

1. Ho (p≤0,39) H1 (p>0,39) 39/100=0,39
2. n=500>30 koristimo Z test
3. $Z_{1-\alpha} = Z_{1-0,05} = Z_{0,95} = 1{,}65$ (vrednost iz tablice)
4. Ho se prihvata za Z<1,65
   Ho se odbacuje za Z≥1,65

5. $$Z = \frac{p-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0{,}19-0{,}39}{\sqrt{\frac{0{,}39(1-0{,}39)}{500}}} = \frac{-0{,}2}{\sqrt{0{,}00048}} = \frac{-0{,}2}{0{,}0219} = -9{,}13$$

Z= -9,13<1,65 pa se Ho prihvata što znači da naša pretpostavka nije tačna. Procenat učešća neispravnih baterija iznosi manje od 39%.

26. Ugostiteljskom objektu je isporučeno 500 gajbi soka sa flašama od 1,5 litara. Odabrano je 80 flaša i utvrđeno je da 26% ima manju težinu od predviđene. Ugovorom je predviđeno da najveće dozvoljeno učešće flaša sa manjom težinom od predviđene iznosi manje od 15%. Sa verovatnoćom od 95% ispitaj pretpostavku da li je isporučena količina soka u skladu sa uslovima iz ugovora.

Rešenje:

1. Ho (p≥0,15) H1 (p<0,15) 15/100=0,15 P=26%=0,26
2. n=80>30 koristimo Z test
3. $-Z_{1-\alpha} = -Z_{1-0,05} = -Z_{0,95} = -1{,}65$ (vrednost iz tablice)
4. Ho se prihvata za Z> -1,65
   Ho se odbacuje za Z≤ -1,65

5. $$Z = \frac{p-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0{,}26-0{,}15}{\sqrt{\frac{0{,}15(1-0{,}15)}{80}}} = \frac{0{,}11}{\sqrt{0{,}00159}} = \frac{0{,}11}{0{,}0399} = 2{,}76$$

6. Z= 2,76 > -1,65 pa se Ho prihvata što znači da naša pretpostavka nije tačna. Procenat učešća flaša soka sa manjom težinom od predviđene nije manji od 15%.

27. Ukoliko je na uzorku od 100 gajbi soka pronađeno 20 polomljenih flaša da li će kupac prihvatiti ovu pošiljku. U prethodnom dogovoru sa prodavcem utvrđeno je da je dozvoljeno 4% škarta. Rizik greške je 5%.

Rešenje zadatka prilagoditi po ugledu na prethodni zadatak.

28. U jednoj proizvodnoj seriji proizvede se 90 proizvoda. Prilikom kontrole utvrđeno je da su 5 proizvoda sa defektom. Odredite interval poverenja za procenat ućešća defektnih proizvoda sa rizikom greške 6%.

Rešenje zadatka prilagoditi po ugledu na prethodni zadatak.

29. Na ozorku od 3000 rođenih beba dobijeno je 2000 devojčica. Testirajte nultu hipotezu da je broj devojčica manji od 2300 ako je rizik greške 5%.

Rešenje zadatka prilagoditi po ugledu na prethodni zadatak.

30. Jedan proizvođač veruje da će njegov proizvod biti kupljen od strane svakog petog kupca. Na uzorku od 400 kupaca 230 je kupilo proizvod ovog proizvođača. Sa rizikom greške od 5% izvršiti testiranje da li je reklamna kampanja adekvatna.

Rešenje zadatka prilagoditi po ugledu na prethodni zadatak.

31. U jednoj smeni u proizvodnoj hali radi 30 mašina. Odabrano je 6 mašina i utvrđeno je koliko škarta proizvode u toku jedne smene:

7 9 3 4 8 5

a) Sa verovatnoćom od 98% ispitaj hipotezu da li je prosečna količina škarta za sve mašine 6,5 proizvoda.

b) Sa verovatnoćom od 90% ispitaj pretpostavku da li je prosečna količina škarta za sve mašine manja od 7 proizvoda.

c) Sa istom verovatnoćom kao pod b) ispitaj pretpostavku da li je prosečna količina škarta za sve mašine veća od 8 proizvoda.

Rešenje:

$$\bar{X}=\frac{\Sigma xi}{N}=\frac{7+9+3+4+8+5}{6}=\frac{36}{6}=6 \qquad \sigma^2=\frac{\Sigma xi^2}{N}-\bar{X}^2=\frac{49+81+9+16+64+25}{6}-36$$

$$\sigma^2=40{,}67-36=4{,}67 \qquad \sigma=\sqrt{\sigma^2}=\sqrt{4{,}67}=2{,}16 \qquad \bar{X}=m \qquad \sigma=Sn$$

a) $\alpha=1-0{,}98=0{,}02$

1. Ho ($\bar{X}=6{,}5$) $\quad$ H_1 ($\bar{X}\neq 6{,}5$)
2. n=6<30 koristimo t test
3. $t_{n-1;\alpha/2}=t_{6-1;0,02/2}=t_{5;0,01}=3{,}365$ (vrednost iz tablice)
4. Ho se prihvata za $|t|<3{,}365$

   Ho se odbacuje za $|t|\geq 3{,}365$

5. $t = \frac{m-\overline{X}_o}{Sn}\sqrt{n-1} = \frac{6-6,5}{2,16}\sqrt{6-1} = \frac{-0,5}{0,96} = -0,52$

6. $|t|= 0,52<3,365$ Ho se prihvata, tvrdnja je tačna. Prosečna količina škarta za sve mašine iznosi 6,5 proizvoda.

b) $\alpha=1-0,90=0,10$

1. Ho ($\overline{X}\geq 7$) H1 ($\overline{X}<7$)
2. n=6<30 koristimo t test
3. $t_{n-1;\alpha}=t_{6-1;0,1}=t_{5;0,1}= 1,476$ (vrednost iz tablice)
4. Ho se prihvata za $t>1,476$
   Ho se odbacuje za $t\leq 1,476$

$t = \frac{m-\overline{X}_o}{Sn}\sqrt{n-1} = \frac{6-7}{2,16}\sqrt{6-1} = \frac{-1}{0,96} = -1,042$

6. $t= -1,042<1,476$ H_1 se prihvata, tvrdnja je tačna. Prosečna količina škarta je manja od 7 proizvoda.

c)

1. Ho ($\overline{X}\leq 8$) H1 ($\overline{X}>8$)
2. n=6<30 koristimo t test
3. $t_{n-1;\alpha}=t_{6-1;0,1}=t_{5;0,1}=1,476$ (vrednost iz tablice)
4. Ho se prihvata za $t<1,476$
   Ho se odbacuje za $t\geq 1,476$

5. $t = \frac{m-\overline{X}_o}{Sn}\sqrt{n-1} = \frac{6-8}{2,16}\sqrt{6-1} = \frac{-2}{0,96} = -2,083$

6. $t= -2,083<1,476$ Ho se prihvata, tvrdnja nije tačna. Prosečna količina škarta nije veća od 8 proizvoda.

32. Na osnovu podataka o potrošnji goriva ko milometru za kombi vozila jednog prevoznika ispitajte sledeće hipoteze:

Potrošnja goriva po km u litrima (x_i)	**19**	**23**	**25**	**27**	**Σ**
Broj kombi vozila (f_i)	**2**	**3**	**7**	**8**	**20**

a) Sa verovatnoćom od 95% ispitaj hipotezu da li je prosečna potrošnja goriva po kilometru 26 litara.

b) Sa istom verovatnoćom ispitaj pretpostavku da li je prosečna potrošnja goriva po kilometru manja od 25 litara.

Rešenje:

X	f	x*f	x^2	x^2*f
19	2	38	361	722
23	3	69	529	1587
25	7	175	625	4375

27	8	216	729	5832
∑	20	498	-	12516

$$\overline{X} = \frac{\sum fixi}{N=\sum fi} = \frac{498}{20} = 24{,}9 \qquad \sigma^2 = \frac{\sum fixi^2}{N} - \overline{X}^2 = \frac{12516}{20} - 24{,}9^2$$

$$\sigma^2 = 625{,}8 - 620{,}01 = 5{,}79 \qquad \sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{5{,}79} = 2{,}15 \qquad \overline{X} = m \qquad \sigma = Sn$$

a) $\alpha = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$

1. Ho ($\overline{X}=26$) H$_1$ ($\overline{X}\neq 26$)
2. n=20<30 koristimo t test
3. $t_{n-1;\alpha/2} = t_{20-1;0,05/2} = t_{19;0,025} = 2{,}0930$ (vrednost iz tablice)
4. Ho se prihvata za $|t| < 2{,}0930$
   Ho se odbacuje za $|t| \geq 2{,}0930$
5. $$t = \frac{m - \overline{X}o}{Sn}\sqrt{n-1} = \frac{24{,}9-26}{2{,}15}\sqrt{20-1} = \frac{-1{,}1}{0{,}49} = -2{,}24$$.
6. $|t| = 2{,}24 > 2{,}0930$ Ho se odbacuje, tvrdnja nije tačna. Prosečna potrošnja goriva ne iznosi 26 litara.

b)

1. Ho ($\overline{X} \geq 25$) H1 ($\overline{X} < 25$)
2. n=20<30 koristimo t test
3. $t_{n-1;\alpha} = t_{20-1;0,05} = t_{19;0,05} = 1{,}7291$ (vrednost iz tablice)
4. Ho se prihvata za $t > 1{,}7291$
   Ho se odbacuje za $t \leq 1{,}7291$
5. $$t = \frac{m - \overline{X}o}{Sn}\sqrt{n-1} = \frac{24{,}9-25}{2{,}15}\sqrt{20-1} = \frac{-0{,}1}{0{,}49} = -0{,}204$$.
6. $t = -0{,}204 < 1{,}7291$ H$_1$ se prihvata, tvrdnja je tačna. Prosečna potrošnja goriva je manja od 25 litara.

33. Praćenjem rada sezonskih radnika izabrano je 200 radnika od kojih 24 radnika prebacuju normu za 30%. Sa verovatnoćom od 95% ispitajte da li se može prihvatiti hipoteza da 10% radnika prebacuje normu za 30%.

Rešenje:

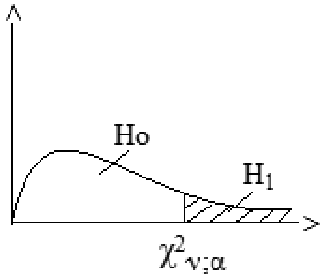
1. Ho: Deset procenata radnika prebacuje normu za 30%.
   H$_1$: Deset procenata radnika ne prebacuje normu za 30%.

	%	Broj radnika (fi)	Očekivane fi'	fi - fi'	$(fi - fi')^2$	$\frac{(fi - fi')^2}{fi'}$
Prebacuju normu za 30%	10	24	20	4	16	0,8

Preostali	90	176	180	-4	16	0,089
Σ	100	200	200	-	-	0,889

$\chi^2=0{,}889$ $\quad\nu=r-1=2-1=1\quad$ $\alpha=1-0{,}95=0{,}05\quad$ $\chi^2_{\nu;\alpha}=\chi^2_{1;0,05}=3{,}841$

$$\chi^2=\sum\frac{(fi-fi')^2}{fi'}$$



K∈(3,841;+∞) $\quad\chi^2=0{,}889<3{,}841$ Ho se prihvata. Deset procenata radnika prebacuje normu za 30%.

34. U preduzeću koje se bavi proizvodnjom posteljine izabrano je 90 radnika od kojih su 30 sa srednjom školskom spremom, 45 sa višom školskom spremom i 15 sa visokom školskom spremom. Proveri da li se sa rizikom greške od 0,05 može prihvatiti hipoteza da je u preduzeću sledeća kvalifikaciona struktura zaposlenih: 40%, 30% i 30%.

Rešenje:

1. Ho: Kvalifikaciona struktura zaposlenih je u skladu sa očekivanom.

H_1: Kvalifikaciona struktura zaposlenih nije u skladu sa očekivanom.

$\nu=r-1=3-1=2\quad \alpha=0{,}05\quad \chi^2_{\nu;\alpha}=\chi^2_{2;0,05}=5{,}991$

$$\chi^2=\sum\frac{(fi-fi')^2}{fi'}$$

	%	Broj radnika (fi)	Očekivane fi'	fi - fi'	(fi - fi')^2	$\frac{(fi-fi')^2}{fi'}$
Srednja školska sprema	40	30	36	-6	36	1
Viša školska sprema	30	45	27	18	324	12
Visoka školska sprema	30	15	27	-12	144	5,333
Σ	100	90	90	-	-	18,333

K∈(5,991;+∞) $\quad\chi^2=18{,}333>5{,}991$ H_1 se prihvata. Kvalifikaciona struktura zaposlenih nije u skladu sa očekivanom.

35. Na osnovu podataka o proizvodnji i prodaji četiri vrste kolača u jednoj poslastičari sa rizikom greške od 1% ispitaj da li je razlika u strukturi proizvodnje i prodaje statistički značajna.

Kolači	X	Y	Z	W	Σ
Struktura proizvodnje (u %)	45	25	10	20	100
Prodaja	25	20	12	10	67

Rešenje:

1. Ho: Razlika u strukturi proizvodnje i prodaje nije statistički značajna.

   H_1: Razlika u strukturi proizvodnje i prodaje statistički je značajna.

$\nu=r-1=4-1=3$ $\alpha=0,01$ $\chi^2_{\nu;\alpha}=\chi^2_{3;0,01}=11,345$

Vrsta proizvoda	%	Broj kolača (fi)	Očekivane fi'	fi - fi'	$(fi - fi')^2$	$\frac{(fi - fi')^2}{fi'}$
X	45	25	30,15	-5,15	26,5225	0,879685
Y	25	20	16,75	3,25	10,5625	0,630597
Z	10	12	6,7	5,3	28,09	4,193
W	20	10	13,4	-3,4	11,56	0,863
Σ	100	67	67	-	-	6,566

$$\chi^2=\sum\frac{(fi - fi')^2}{fi'}$$

$K\in(11,345;+\infty)$ $\chi^2=6,566<11,345$ Ho se prihvata. Razlika u strukturi proizvodnje i prodaje nije statistički značajna.

36. Na osnovu podataka koji su dati u narednoj tabeli, a odnose se na ocene karakteristika turističkog mesta od strane 829 turista na osnovu kojih oni radije biraju to turističko mesto za letovanje u odnosu na drugo:

Pol (y) r s	Karakteristike turističkog mesta			
	Lepota plaže	Cena	Usluge	Čistoća vode u moru
Ž	80	190	73	50
M	120	80	136	100

a) Sa rizikom greške od 1% ispitaj da li su razlike u polu značajne za donošenje odluka prilikom izbora mesta za letovanje.

b) Izračunaj vrednost koeficijenta kontigencije.

Rešenje:

a)

Ho: Izbor turističkog mesta za letovanje ne zavisi od pola.

H_1: Izbor turističkog mesta za letovanje zavisi od pola.

χ^2 (r-1)(s-1);α= χ^2 (4-1)(2-1);0,05= χ^2 3*1;0,05= χ^2 3;0,05=7,815 (vrednost iz tablice)

$$\chi^2 = \sum \frac{(fij - fij')^2}{fij'}$$

Pol (y) r s	Karakteristike turističkog mesta				
	Lepota plaže	Cena	Usluge	Čistoća vode u moru	Σ
Ž	80	190	73	50	393
M	120	80	136	100	436
Σ	200	270	209	150	829

Očekivane fij za žene:
200*393/829=94,81 270*393/829=127,99 209*393/829=99,08
150*393/829=71,11
Očekivane fij za muškarce:
200*436/829=105,19 270*436/829=142 209*436/829=109,92
150*436/829=78,89

fij	fij'	fij - fij'	$(fij - fij')^2$	$\frac{(fij - fij')^2}{fij'}$
80	94,81	-14,81	219,34	2,31
190	127,99	62,01	3845,24	30,04
73	99,08	-26,08	680,17	6,86
50	71,11	-21,11	445,63	6,27
120	105,19	14,81	219,34	2,09
80	142	-62	3844,00	27,07
136	109,92	26,08	680,17	6,19
100	78,89	21,11	445,63	5,65
Σ	828,99	-	-	86,48

χ^2=86,48>7,815 H_1 se prihvata i zaključujemo da izbor turističkog mesta za letovanje zavisi od pola.

b)

$$C_{max} = \sqrt{\frac{(r-1)}{r}} = \sqrt{\frac{4-1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{0{,}75} = 0{,}87$$

$$C=\sqrt{\frac{\chi^2}{n+\chi^2}}=\sqrt{\frac{86{,}48}{829+86{,}48}}=\sqrt{\frac{86{,}48}{915{,}48}}=\sqrt{0{,}094}=0{,}31$$

Na osnovu vrednosti koeficijenta kontigencije utvrdili smo da između pojava postoji relativno slaba veza.

37. Sprovedena je analiza tržišta sa ciljem da se ispita postojanje zavisnosti između godina starosti i preferencija određenih karakteristika jednog proizvoda.

Karakteristike proizvoda r s	Godine starosti			
	10,1-15	15,1-20	20,1-25	25,1-30
Cena	12	20	50	40
Udobnost	70	52	39	20
Izdržnjivost	63	7	38	42

a) Sa rizikom greške od 1% ispitaj da li su posmatrana obeležja nezavisna.

b) Izračunaj vrednost koeficijenta kontigencije.

Rešenje:

a)

Ho: Posmatrana obeležja su nezavisna.

H_1: Posmatrana obeležja su zavisna.

χ^2 (r-1)(s-1);α= χ^2 (4-1)(3-1);0,05= χ^2 3*2;0,05= χ^2 6;0,05=12,592 (vrednost iz tablice)

$$\chi^2=\sum\frac{(fij-fij')^2}{fij'}$$

Karakteristike proizvoda r s	Godine starosti				
	10,1-15	15,1-20	20,1-25	25,1-30	Σ
Cena	12	20	50	40	122
Udobnost	70	52	39	20	181
Izdržnjivost	63	7	38	42	150
Σ	145	79	127	102	453

145*122/453=39,05 79*122/453=21,28 127*122/453=34,20 102*122/453=27,47

145*181/453=57,94 79*181/453=31,57 127*181/453=50,74

102*181/453=40,75

145*150/453=48,01 79*150/453=26,16 127*150/453=42,05
102*150/453=33,77

fij	fij'	fij - fij'	(fij - fij')^2	$\frac{(fij - fij')^2}{fij'}$
12	39,05	-27,05	731,70	18,74
20	21,28	-1,28	1,64	0,08
50	34,2	15,8	249,64	7,30
40	27,47	12,53	157,00	5,72
70	57,94	12,06	145,44	2,51
52	31,57	20,43	417,38	13,22
39	50,74	-11,74	137,83	2,72
20	40,75	-20,75	430,56	10,57
63	48,01	14,99	224,70	4,68
7	26,16	-19,16	367,11	14,03
38	42,05	-4,05	16,40	0,39
42	33,77	8,23	67,73	2,01
Σ	452,99	-	-	81,95

χ^2=81,95>12,592 H_1 se prihvata i zaključujemo da su posmatrana obeležja zavisna.

b)

$$C_{max}=\sqrt{\frac{(r-1)}{r}}=\sqrt{\frac{4-1}{4}}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\sqrt{0{,}75}=0{,}87$$

$$C=\sqrt{\frac{\chi^2}{n+\chi^2}}=\sqrt{\frac{81{,}95}{453+81{,}95}}=\sqrt{\frac{81{,}95}{534{,}95}}=\sqrt{0{,}153}=0{,}39$$

Na osnovu vrednosti koeficijenta kontigencije utvrdili smo da između pojava postoji relativno slaba veza.

38. Rukovodstvo fabrike čokolade tvrdi da ukus ne zavisi od pola. U testiranju je učestvovalo 200 ispitanika. Na osnovu podataka u tabeli ispitajte da li su tvrdnje rukovodstva tačne.

Čokolada	Bela	Crna	Sa keksom	Sa lešnikom	Σ
Muškarci	15	20	40	30	105
Žene	25	23	15	32	95
Σ	40	43	55	62	200

Rešenje zadatka prilagoditi po ugledu na prethodni zadatak.

39. Na osnovu podataka u tabeli sa rizikom greške 0,05 proverite da li je empirijski raspored u skladu sa očekivanim.

Broj neispravnih proizvoda	Broj proizvedenih serija (fi)	Očekivani broj serija proizvodnje (fi')
0	10	12
1	19	22
2	31	28
3	20	18
Σ	80	80

Rešenje:

1. Ho: Empirijski raspored je u skladu sa očekivanim.
   H_1: Empirijski raspored nije u skladu sa očekivanim.

$\nu = r-1 = 4-1 = 3$ $\alpha = 0{,}05$ $\chi^2_{\nu;\alpha} = \chi^2_{3;0,05} = 7{,}815$

$$\chi^2 = \sum \frac{(fi - fi')^2}{fi'}$$ $K \in (7{,}815; +\infty)$

Broj neispravnih proizvoda	fi	fi'	fi - fi'	(fi - fi')^2	$\frac{(fi - fi')^2}{fi'}$
0	10	12	-2	4	0,33
1	19	22	-3	9	0,41
2	31	28	3	9	0,32
3	20	18	2	4	0,22
Σ	80	80	-	-	1,29

$\chi^2 = 1{,}29 < 7{,}815$ Ho se prihvata. Empirijski raspored je u skladu sa očekivanim.

40. Na osnovu podataka o potrošnji hleba po domaćinstvima koji su dati u narednoj tabeli sa rizikom greške od 0,05 ispitaj da li je potrošnja hleba u

skladu sa očekivanom.

Potrošnja hleba (f_1)	2	6	9	7	3	6	10	6
Očekivana potrošnja hleba (fi')	4	8	5	5	6	9	5	5

Rešenje:

1. Ho: Potrošnja hleba je u skladu sa očekivanom.
   H_1: Potrošnja hleba nije u skladu sa očekivanom.

$\nu=r-1=8-1=7 \qquad \alpha=0,05 \qquad \chi^2_{\nu;\alpha}=\chi^2_{7;0,05}=14,067$

$$\chi^2=\sum\frac{(fi - fi')^2}{fi'} \qquad K\in(14,067;+\infty)$$

fi	fi'	fi - fi'	$(fi - fi')^2$	$\frac{(fi - fi')^2}{fi'}$
2	4	-2	4	1,00
6	8	-2	4	0,50
9	5	4	16	3,20
7	5	2	4	0,80
3	6	-3	9	1,50
6	9	-3	9	1,00
10	5	5	25	5,00
6	5	1	1	0,20
25	25	-	-	13,20

$\chi^2=13,20<14,067$ Ho se prihvata. Potrošnja hleba je u skladu sa očekivanom.

41. U fabrici ima tri pogona. Na osnovu analize rukovodstva utvrđeno je da se 45% proizvoda proizvede u prvom pogonu, 28% u drugom, a 27% u trećem pogonu. Odabran je uzorak od 600 proizvoda od kojih su 250 iz prvog pogona, 200 iz drugog i 150 iz trećeg pogona. Testirajte hipotezu da je analiza rukovodstva dala tačne rezultate ukoliko je rizik greške 5%.

Rešenje zadatka prilagoditi po ugledu na prethodni zadatak.

42. Neophodno je testirati hipotezu da li se tvrdnja proizvođača da je lek dobar slaže sa tvrdnjama lekara (rizik greške 5%). U testiranju je učestvovalo 50 lekara od kojih je 30 izjavilo da je lek dobar, 15 se nije izjasnilo, a 5 lekara smatra da lek nije dobar.

Rešenje zadatka prilagoditi po ugledu na prethodni zadatak.

43. Na teritoriji grada je za godinu dana podignuto 3000 hipotekarnih kredita. Na uzorku od 70 hipotekarnih kredita utvrđena je prosečna vrednost od 25000 evra i standardna devijacija od 12000 evra. Nađite 95% interval poverenja prosečne vrednosti hipotekarnih kredita u gradu.

Rešenje zadatka prilagoditi po ugledu na prethodne zadatke.

REGRESIJA I KORELACIJA

1. Na parcelama koje imaju isti kvalitet zemljišta zasejana je jedna sorta žitarica.

Parcela	Prinosi u t/ha (x)	Količina đubriva u kg/ha (y)
1	6	1000
2	7	800
3	7,5	900
4	5	760
5	5,2	730
6	4,9	1200
7	6,7	970

a) Utvrditi da li između posmatranih pojava postoji korelaciona veza i odrediti njen smer i jačinu.

b) Odredite liniju regresije.

v) Izračunajte standardnu grešku regresije.

g) Odredite koeficijent determinacije.

Rešenje:

X	y	x^2	y^2	x*y
6	1000	36	1000000	6000
7	800	49	640000	5600
7,5	900	56,25	810000	6750
5	760	25	577600	3800
5,2	730	27,04	532900	3796
4,9	1200	24,01	1440000	5880
6,7	970	44,89	940900	6499
42,3	6360	262,19	5941400	38325

a)

$$r = \frac{n * \sum xy - \sum x \sum y}{\sqrt{n \sum x^2 - (\sum x)^2} \sqrt{n \sum y^2 - (\sum y)^2}}$$

$$r = \frac{7 * 38325 - 42{,}3 * 6360}{\sqrt{7 * 262{,}19 - 42{,}3 * 42{,}3}\sqrt{7 * 5941400 - 6360 * 6360}}$$

$$r = \frac{-753}{6{,}78 * 1067{,}8} = \frac{-753}{7239{,}68} = -0{,}1040$$

Između pojava postoji slaba inverzna korelaciona veza.

b) Linija regresije je: $y_c = b_o + b_1 x = 1007{,}38 - 16{,}36x$

$$b_1 = \frac{n * \sum xy - \sum x \sum y}{n * \sum x^2 - (\sum x)^2} = \frac{-753}{46{,}04} = -16{,}36$$

$$b_0 = \frac{\sum y}{n} - b_1 \frac{\sum x}{n} = \frac{6360}{7} - 16{,}36 \frac{42{,}3}{7} = 908{,}57 + 16{,}36 * 6{,}04$$

$$b_0 = 908{,}57 + 98{,}81 = 1007{,}38$$

v) Standardna greška regresije izračunava se na sledeći način:

$$Se = \sqrt{\frac{\sum y^2 - b_o \sum y - b_1 \sum xy}{n-2}}$$

$$Se = \sqrt{\frac{5941400 - 1007{,}38 * 6360 + 16{,}36 * 38325}{7-2}}$$

$$Se = \sqrt{\frac{161460{,}2}{5}} = \sqrt{32292{,}04} = 179{,}699$$

g) Koeficijent determinacije može biti određen na dva načina:

$R^2 = (-0{,}1040)^2 = 0{,}0108$ ili 1,08%.

$$R^2 = b_1^{\ 2} \frac{\sum x^2 - n\left(\frac{\sum x}{n}\right)^2}{\sum y^2 - n\left(\frac{\sum y}{n}\right)^2} = (-16{,}36)^2 \frac{262{,}19 - 7 * \left(\frac{42{,}3}{7}\right)^2}{5941400 - 7 * \left(\frac{6360}{7}\right)^2}$$

$$R^2 = 267{,}65 * \frac{6{,}58}{162885{,}7} = 0{,}0108$$ ili 1,08%.

2. Produktivnost rada radnika i iznos škarta u kilogramima dati su u narednoj tabeli.

Radnik	1	2	3	4	5	6	7
Produktivnost rada	5	4	5,5	4,7	6	8	7,3
Škart	5	7	10	8	2	4	6

a) Utvrditi da li između posmatranih pojava postoji korelaciona veza i odrediti njen smer i jačinu.

b) Odredite liniju regresije.

v) Izračunajte standardnu grešku regresije.

Rešenje zadatka prilagoditi po ugledu na prethodni zadatak.

3. Za sledeće parove opažanja, (x,y), izračunajte liniju regresije I koeficijent korelacije.

a) (3,6), (4,10), (5,6), (4,3), (9,14);
b) (6,4), (9,7), (7,6), (5,1),(12,16);
v) (17,9), (12,3), (17,15), (20,9), (13,9);
g) (1,11), (7,14), (6,18), (3,14), (12,18).

Rešenje zadatka prilagoditi po ugledu na prethodni zadatak.

4. Na osnovu podatka o uspehu studenata na kolokvijumu i na ispitu ispitajte da li postoji korelacija između njih.

Ispit	80	75	56	80	65	62	80	55	60
Kolokvijum	10	15	12	17	18	19	20	15	12

Rešenje zadatka prilagoditi po ugledu na prethodni zadatak.

5. Na osnovu podataka o ocenama studenata i ocenama kojima su studenti ocenili rad profesora utvrdite da li između njih postoji korelaciona veza.

Ocena nastavnika	4	3,6	4,8	4,9	5	2,3	3,5	4,6	4,7	5	4,1
Ocene studenata	2,5	3,4	5	4,3	3,9	4,2	2,4	2,8	3,5	4	5

Rešenje zadatka prilagoditi po ugledu na prethodni zadatak.

6. Na osnovu podataka o prihodu i prodaji jednog prodajnog objekta u periodu od 11 godina odredite liniju regresije, koeficijent korelacije, standardnu grešku regresije i koeficijent determinacije.

Godina	Prihod u 000 dinara (X)	Prodaja u 000 dinara(Y)
1	10000	7000
2	25000	10000
3	15000	12000
4	9000	6000
5	35000	20000
6	40000	35000
7	38000	32000
8	32000	28000
9	29000	24000
10	33000	29000
11	40000	30000

Rešenje zadatka prilagoditi po ugledu na prethodne zadatke.

7. Cene televizora razlikuju se po regionima Republike Srbije.

Prodaja u 000 evra (y)	1000	900	800	1500	1800	2000	980
Cena (x)	30	50	40	100	200	260	90

a) Na osnovu datih podataka odredite liniju regresije.

b) Ispitajte da li između prodaje i cene postoji korelaciona veza.

v) Koju bismo prodaju mogli očekivati ukoliko je cena 10 evra?

Rešenje zadatka prilagoditi po ugledu na prethodne zadatke.

8. Na osnovu podataka o dnevnoj prodaji i rezultata testa sklonosti prodajnih zastupnika odredite:

Dnevna prodaja	10	12	28	24	18	16	15	12
Rezultat testa	55	60	85	75	80	85	65	60

a) Liniju regresije.

b) Standardnu grešku regresije.

v) Koeficijent determinacije.

Rešenje zadatka prilagoditi po ugledu na prethodni zadatak.

9. Na osnovu podataka o dozi leka koju su pacijenti dobili i vremenu koje je potrebno da se pacijent oporavi odredite:

Doza leka (u mg)	360	250	150	300	500
Vreme oporavka pacijenta (u časovima)	15	20	25	17	10

a) U zavisnosti od doze leka procenite liniju regresije vremena oporavka pacijenata.

b) Da li biste mogli predvideti vreme oporavka pacijenta koji je primio 1,5g leka?

v) Ispitajte da li postoji korelaciona veza između primenjene doze leka i vremena oporavka pacijenata.

Rešenje zadatka prilagoditi po ugledu na prethodni zadatak.

10. Na osnovu opažanja dve varijable zabeleženi su sledeći rezultati:

X	20	11	30	12	24
Y	8	21	10	13	30

a) Odredite koeficijent korelacije.

b) Odredite koeficijent determinacije.

Rešenje zadatka prilagoditi po ugledu na prethodni zadatak.

11. U tabeli su prikazani podaci o cenama jednog pića (x) i o tome koliko puta su kupci tokom svake godine kupovali to piće (y).

X	120	230	250	260	190	180	200	206
Y	12	15	19	20	17	12	10	16

a) Odredi liniju regresije broja kupovina po kupcu u zavisnosti od toga kako on ocenjuje vino.

b) Odredite koeficijent determinacije.

v) Izračunajte standardnu grešku regresije.

Rešenje zadatka prilagoditi po ugledu na prethodni zadatak.

12. U tabeli su dati podaci o uspehu studenata na ispitu kao i o ocenama njihovih biznis planova.

Ispit	81	62	74	78	93	69	72	83	90	84
Biznis plan	76	71	69	76	87	62	80	75	92	79

a) Odredite koeficijent korelacije ranga.

Rešenje:

Ispit (x)	Biznis plan (y)	Rang x	Rang y	d(xy)	$d(xy)^2$
81	76	5	5,5	-0,5	0,25
62	71	10	8	2	4
74	69	7	9	-2	4
78	76	6	5,5	0,5	0,25
93	87	1	2	-1	1
69	62	9	10	-1	1
72	80	8	3	5	25
83	75	4	7	-3	9
90	92	2	1	1	1
84	79	3	4	-1	1
Σ	-	-	-	-	46,5

$$r_s = 1 - \frac{6\sum di^2}{n(n^2-1)} = 1 - \frac{6 * 46{,}5}{10(10^2-1)} = 1 - 0{,}2818 = 0{,}7182$$

Između pojava postoji visoka direktna korelaciona veza.

13. Izračunati koeficijent korelacije ranga na osnovu podataka o stopama rasta dobiti i ukupne imovine koji su dati u tabeli.

Dobit	Imovina	Dobit	Imovina	Dobit	Imovina
30.3	200	13.0	350	10.7	250
25.4	90	14.9	100	16.4	670
29.5	305	15.9	600	7.6	369
20.7	215	17.0	720	8.1	480
20	653	18.3	540	6.9	289
18.1	195	15.0	356	4.7	657
15.7	290	12.8	240	/	/

Rešenje zadatka prilagoditi po ugledu na prethodni zadatak.

14. Na osnovu podataka koji su dati u narednoj tabeli, a odnose se na ocene karakteristika turističkog mesta od strane 470 turista na osnovu kojih oni radije biraju to turističko mesto za letovanje u odnosu na drugo:

Pol (y) r s	Karakteristike turističkog mesta	
	Lepota plaže	Cena
Ž	80	190
M	120	80

a) Ispitajte kolika je povezanost između ove dve varijable uz pomoć Φ koeficijenta korelacije.

Rešenje:

a)

Pol (y) r S	Karakteristike turističkog mesta		
	Lepota plaže	Cena	Σ
Ž	80 (a)	190 (b)	270 (a+b)
M	120 (c)	80 (d)	200 (c+d)
Σ	200 (a+c)	270 (b+d)	470

$$\Phi = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}} = \frac{80 * 80 - 190 * 120}{\sqrt{270 * 200 * 270 * 200}}$$

$$\Phi = \frac{6400 - 22800}{\sqrt{2916000000}} = \frac{-16400}{54000} = -0{,}3037$$

15. U testiranju je učestvovalo 83 ispitanika. Na osnovu podataka ispitajte kolika je povezanost između ove dve varijable uz pomoć Φ koeficijenta korelacije.

Čokolada	Bela	Crna	Σ
Muškarci	15	20	35
Žene	25	23	48
Σ	40	43	83

Rešenje zadatka prilagoditi po ugledu na prethodni zadatak.

ANALIZA VREMENSKIH SERIJA

1. Podaci o proizvodnji uglja dati su u sledećoj tabeli.

Godine (X)	2007.	2008.	2009.	2010.	2011.	2012.	2013.	2014.	2015.
Proizvo-dnja u 000 t (Y)	10	15	22	24	18	20	17	21	25

a) Odrediti linearni trend.

b) Na osnovu odabranog trenda izvršiti ekstrapolaciju proizvodnje uglja za 2020. godinu.

v) Izračunajte standardnu grešku trenda.

g) Odredite geometrijsku stopu rasta.

Rešenje:

a)

Godine	Y	x	x^2	x*y	Yt	y-yt	$(y-yt)^2$
2007	10	-4	16	-40	14,83	-4,83	23,33
2008	15	-3	9	-45	15,9	-0,9	0,81
2009	22	-2	4	-44	16,97	5,03	25,30
2010	24	-1	1	-24	18,04	5,96	35,52
2011	18	0	0	0	19,11	-1,11	1,23
2012	20	1	1	20	20,18	-0,18	0,03
2013	17	2	4	34	21,25	-4,25	18,06
2014	21	3	9	63	22,32	-1,32	1,74
2015	25	4	16	100	23,39	1,61	2,59
Σ	172	-	60	64	171,99	-	108,62

$$bo=\frac{\Sigma y}{n} \qquad b_1=\frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2} \qquad yt=bo+b_1x$$

$$bo=\frac{172}{9}=19{,}11 \qquad b_1=\frac{64}{60}=1{,}07 \qquad yt=19{,}11+1{,}07x$$

b) yt_{2020}=19,11+1,07*9=19,11+9,63=28,74

v) $S_y = \sqrt{\frac{\Sigma(y-yt)^2}{N}} = \sqrt{\frac{108,62}{9}} = \sqrt{12,07} = 3,47$

g) $Rs = (\sqrt[9]{\frac{25}{10}} - 1) * 100\% = (\sqrt[9]{2,5} - 1) * 100\% = \left(\frac{1}{9} log 2,5 - 1\right) * 100\%$

$Rs = (\frac{0,3979}{9} - 1) * 100\% = (0,0442 - 1) * 100\% = (1,1071 - 1) * 100\% = 10,71\%$

2. Godišnji promet u jednom preduzeću je:

Godine	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Promet (u)	35	45	52	49	38	36

Odredite:

a) Linearni trend.

b) Geometrijsku stopu rasta

v) Predvidite promet za 2001. godinu.

g) Standardnu grešku trenda.

Rešenje zadatka prilagoditi po ugledu na prethodni zadatak.

3. Prihod u 000 dinara jedne fabrike od 2007 – 2015. godine je:

Godine	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Prihod u 000 dinara (u)	190	155	156	149	200	213	270	240	270

a) izračunaj geometrijsku stopu rasta.

b) na osnovu linearnog trenda predvidi prihod za 2018. godinu.

v) odredi standardnu grešku trenda.

Rešenje zadatka prilagoditi po ugledu na prethodni zadatak.

4. Na osnovu podataka datih u tabeli:

Godina	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Proizvodnja	50	71	100	150	213	214	366	430

a) Odredite linearni trend.

b) Predvidite trend za 2020. godinu.

v) Godišnji tempo rasta.

Rešenje zadatka prilagoditi po ugledu na prethodni zadatak.

5. Kretanje proizvodnje gvožđa u jednom regionu dato je u tabeli.

Godina	2011	2012	2013	2014	2015
Proizvodnja gvožđa	19	25	27	24	14

a) Odredi linearni trend.

b) Predvidi proizvodnju za 1998. godinu.

v) Odredi standardnu grešku trenda.

Rešenje zadatka prilagoditi po ugledu na prethodni zadatak.

6. Prihod u 000 dinara jedne fabrike od 2009 – 2015. godine je:

Godine	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Prihod u 000 dinara (u)	123	142	132	152	141	135	122

a) odredite linearni trend, izračunaj geometrijsku stopu rasta.

b) na osnovu linearnog trenda predvidi prihod za 2020. godinu.

v) odredite standardnu grešku trenda.

g) izračunajte geometrijsku stopu rasta.

Rešenje zadatka prilagoditi po ugledu na prethodni zadatak.

7. Na osnovu podataka o potrošnji brašna odredite:

a) linearni trend i standardnu grešku trenda.

b) geometrijsku stopu rasta.

v) predvidi trend kretanja proizvodnje za 2013. godinu.

Godine	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2013	2014	2015
Potrošnja brašna	45	30	32	37	38	39	42	41	39

Rešenje zadatka prilagoditi po ugledu na prethodni zadatak.

8. Na osnovu podataka datih u tabeli odredi:.

a) Linearni trend i standardnu grešku trenda.

b) Predvidi trend kretanja za 2011. godinu.

v) Odredi geometrijsku stopu rasta.

Godine	**2008**	**2009**	**2010**	**2011**	**2012**	**2013**	**2014**	**2015**
Proizvodnja pšenice	**20**	**23**	**24**	**28**	**19**	**18**	**32**	**35**

Rešenje zadatka prilagoditi po ugledu na prethodni zadatak.

9. Na osnovu proizvodnje čarapa za period od 2010 – 2015. godine odredi:

a) Linearni trend.

b) Standardnu grešku trenda.

v) Geometrijsku stopu rasta.

g) Predvidi trend kretanja proizvodnje za 2020. Godinu.

Proizvodnja u 2010. godini je bila 100 hiljada komada.

Godina	**2010**	**2011**	**2012**	**2013**	**2014**	**2015**
Lančani indeks (V)	**-**	**115**	**113**	**117**	**112**	**119**

Rešenje:

Najpre je neophodno na osnovu lančanih indeksa izračunati originalne podatke vremenske serije uz pomoć formule:

$$Vi = \frac{yi}{yi-1} * 100\% \qquad yi = \frac{yi-1 * Vi}{100} \qquad yi = \frac{100*115}{100} = 115\%$$

Godine	Lančani indeks (L)	y
2010	-	100
2011	115	115
2012	113	129,95
2013	117	152,04
2014	112	170,29
2015	119	202,64
Σ	-	869,92

Rešenje zadatka prilagoditi po ugledu na prethodni zadatak.

10. Pomoću metoda odnosa prema opštem proseku ispitajte da li sezona utiče na kretanje broja turista na Kopaoniku.

Kvartali	2012	2013	2014	2015
I	10	12	11	15
II	13	17	14	10
III	19	15	18	18
IV	15	12	13	17

Rešenje:

Kvartalni prosek: $\bar{y}_i = \frac{\Sigma y_{ij}}{4}$

$\bar{y}_i$=48/4=12 $\bar{y}_i$=54/4=13,5 $\bar{y}_i$=70/4=17,5 $\bar{y}_i$=57/4=14,25

Opšti kvartalni prosek: $\bar{\bar{y}}_i = \frac{\Sigma \bar{y}_i}{4} = \frac{57{,}25}{4} = 14{,}31$

Sezonski indeks (poslednja kolona) dobija se po formuli: $Is = \frac{\bar{y}}{\bar{\bar{y}}_i} * 100$

Kvartali	2012	2013	2014	2015	$\bar{y}_i$	Is
I	10	12	11	15	12	83,86
II	13	17	14	10	13,5	94,34
III	19	15	18	18	17,5	122,29
IV	15	12	13	17	14,25	99,58
Σ	-	-	-	-	57,25	400,07

U prvom kvartalu izražen je negativan uticaj sezone jer je sezonski indeks ispod proseka za 16,14%. U drugom kvartalu uticaj sezone je zanemarljiv jer je sezonski indeks 5,66% ispod proseka. U trećem kvartalu primetan je pozitivan uticaj sezone (sezonski indeks 22,29% iznad proseka), dok je u poslednjem kvartalu prisutan negativan uticaj sezone jer je sezonski indeks 0,42% ispod proseka.

11. Pomoću metoda odnosa prema opštem proseku ispitajte da li proizvodnja voća u (1000 kg) po kvartalima ima sezonski karakter.

Kvartali	2012	2013	2014	2015
I	16	15	12	13
II	19	20	19	21
III	23	25	22	25
IV	14	12	11	15

Rešenje zadatka prilagoditi po ugledu na prethodni zadatak.

12. Pomoću metoda odnosa prema opštem proseku ispitajte da li sezona utiče na prodaju sladoleda.

Kvartali	2012	2013	2014	2015
I	10	12	11	10
II	25	27	30	25
III	29	30	33	24
IV	10	11	12	10

Rešenje zadatka prilagoditi po ugledu na prethodni zadatak.

13. Pomoću metoda odnosa prema pokretnim prosecima ispitajte da li sezona utiče na kretanje prodaje vina u hotelima. Isključite uticaj sezone iz onog kvartala u kome je najizraženiji.

Kvartal	2012	2013	2014	2015
I	35	37	34	32
II	32	35	28	25
III	12	15	10	16
IV	25	29	24	22

Rešenje:

Pokretni proseci $\overline{y}$:

(35+32+12+25)/4=26
(32+12+25+37)/4=26,5
...

Centrirani pokretni proseci $\overline{y}c$:

(26+26,5)/2=26,25
(26,5+27,25)/2=26,875
...

Sezonski koeficijenti y/$\overline{y}$c obračunati su u poslednjoj koloni tabele.

Godine	Kvartali	y	$\overline{y}$	$\overline{y}$c	y/$\overline{y}$c
2011	I	35	-	-	-
	II	32	26	-	-
	III	12	26,5	26,25	0,46
	IV	25	27,25	26,875	0,93
	I	37	28	27,625	1,34
2012	II	35	29	28,5	1,23
	III	15	28,25	28,625	0,52
	IV	29	26,5	27,375	1,06
	I	34	25,25	25,875	1,31

	II	28	24	24,625	1,14
2013	III	10	23,5	23,75	0,42
	IV	24		23,125	1,04
			22,75		
	I	32	24,25	23,5	1,36
	II	25	23,75	24	1,04
2014	III	16	-	-	-
	IV	22		-	-

Kvartali	2012	2013	2014	2015	Kvartalne sredine $\bar{y}_i$	Sezonski indeksi Is
I	-	1,34	1,31	1,36	1,34	134%
II	-	1,23	1,14	1,04	1,14	114%
III	0,46	0,52	0,42	-	0,47	47%
IV	0,93	1,06	1,04	-	1,01	101%

$\bar{y}_i$=4,01/3=1,34 $\bar{y}_i$=3,41/3=1,14 $\bar{y}_i$=1,4/3=0,47 $\bar{y}_i$=3,03/3=1,01

Najjači uticaj sezone je u I kvartalu i u njemu vršimo desezoniranje.

Godine	y_I	Is prvog kvartala	y_I/Is prvog kvartala
2011	35	134%	26,12
2012	37	134%	27,61
2013	34	134%	25,37
2014	32	134%	23,88

U poslednjoj koloni tabele vidimo koliko bi iznosila prodaja vina u I kvartalu da nije bilo sezonskog uticaja.

14. Pomoću metoda odnosa prema pokretnim prosecima ispitajte da li sezona utiče na kretanje proizvodnje paradajza (u tonama). Isključite uticaj sezone iz onog kvartala u kome je najizraženiji.

Kvartali	2012	2013	2014	2015
I	2	1	3	4
II	50	58	60	52
III	100	150	200	220
IV	10	9	8	10

Rešenje zadatka prilagoditi po ugledu na prethodni zadatak.

15. Pomoću metoda odnosa prema pokretnim prosecima ispitajte da li sezona utiče na kretanje proizvodnje brze hrane. Isključite uticaj sezone iz onog kvartala u kome je najizraženiji.

Kvartali	2012	2013	2014	2015
I	26	27	29	30
II	28	29	24	32
III	10	15	12	14
IV	19	18	21	22

Rešenje zadatka prilagoditi po ugledu na prethodni zadatak.

16. U tabeli je data vrednost proizvodnje ječma po godinama. Sa rizikom greške 0,05 spitajte da li pojavu karakterišu ciklične varijacije.

Godine	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Proiz. ječma (Y)	7	9	13	14	17	21	22	23	26

Godine	2012	2013	2014	2015
Proizvodnja ječma (Y)	29	32	35	39

Rešenje:

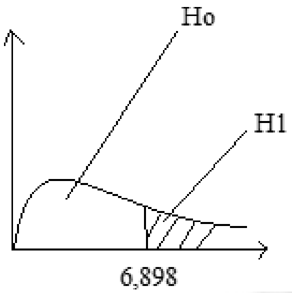
Potrebno je izračunati linearni trend. Obračun trenda izvršite po ugledu na prethodne zadatke. Primenom formula dobijamo liniju trenda:

yt=22,08+2,54x

Godine	y	x	x^2	x*y	yt	(y/yt)*100	Odstupanje od proseka (100%)
2003	7	-6	36	-42	6,84	102,34	+
2004	9	-5	25	-45	9,38	95,95	-
2005	13	-4	16	-52	11,92	109,06	+
2006	14	-3	9	-42	14,46	96,82	-
2007	17	-2	4	-34	17	100,00	+
2008	21	-1	1	-21	19,54	107,47	+
2009	22	0	0	0	22,08	99,64	-
2010	23	1	1	23	24,62	93,42	-
2011	26	2	4	52	27,16	95,73	-
2012	29	3	9	87	29,7	97,64	-

2013	32	4	16	128	32,24	99,26	-
2014	35	5	25	175	34,78	100,63	+
2015	39	6	36	234	37,32	104,50	+
Σ	287		182	463	287,04	-	-

1. Ho: Pojavu ne karakterišu ciklične varijacije
   H1: Pojavu karakterišu ciklične varijacije
2. Prema kriterijumu n>12 posmatrana pojava ispunjava uslov za testiranje i vrednost statistike testa iznosi $\chi^2_{0,05}=6,898$



Ho se prihvata za $\chi^2 p < 6,898$
H1 se prihvata za $\chi^2 p \geq 6,898$

$$\chi^2 p = \sum \frac{(fi - fi')^2}{fi'}$$

3.

4.

$$f'_1 = \frac{5(n-3)}{12} = \frac{5(13-3)}{12} = \frac{50}{12} = 4,17 \quad f'_2 = \frac{11(n-4)}{60} = \frac{11(13-4)}{60} = \frac{99}{60} = 1,65$$

$$f'_3 = \frac{4n-21}{60} = \frac{4*13-21}{60} = \frac{52-21}{60} = \frac{31}{60} = 0,52$$

Trajanje faza u godinama	f	f'	f-f'	$(f-f')^2$	$(f-f')^2 / f'$
1	4	4,17	0,17	0,03	0,01
2	2	1,65	0,35	0,12	0,07
3 i više	1	0,52	0,48	0,23	0,44
Σ	-	-	-	-	0,52

5. $\chi^2_p=0,52<6,898$ Ho se prihvata, posmatranu pojavu ne karakterišu ciklične varijacije.

17. Na osnovu podataka o proizvodnji uglja (u tonama) po godinama ispitajte da li pojavu karakterišu ciklične varijacije. Rizik greške je 5%.

Godine	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Proiz. uglja (Y)	12	15	17	18	19	22	27	19	14

Godine	2012	2013	2014	2015
Proizvodnja uglja (Y)	14	15	12	11

Rešenje zadatka prilagoditi po ugledu na prethodni zadatak.

18. Na osnovu podataka o proizvodnji soli (u tonama) po godinama ispitajte da li pojavu karakterišu ciklične varijacije. Rizik greške je 5%.

Godine	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Proiz. soli (Y)	25	27	29	19	18	16	24	27	25

Godine	2012	2013	2014	2015
Proizvodnja soli (Y)	22	27	29	30

Rešenje zadatka prilagoditi po ugledu na prethodni zadatak.

INDEKSNI BROJEVI

1. Na osnovu podataka o broju zaposlenih u tekstilnoj industriji za posmatrani period odredi:

a) Bazne indekse sa bazom u 2008. godini.

b) Preračunati prethodno dobijene bazne indekse na novu bazu (2012. godina).

v) Na osnovu podatka o prosečnom broju zaposlenih izračunaj indekse.

Godina	2008.	2009.	2010.	2011.	2012.	2013.	2014.	2015.
Broj zaposlenih (y_i) (u 000)	3500	3456	4020	4586	4236	4892	4990	5002

Rešenje:

Godina	2008.	2009.	2010.	2011.	2012.	2013.	2014.	2015.
y_i	3500	3456	4020	4586	4236	4892	4990	5002
$Ii_{(2008)}$	100	98,74	114,86	131,03	121,03	139,77	142,57	142,91
$Ii'_{(2012)}$	82,63	81,59	94,90	108,26	100,00	115,49	117,80	118,08
$Ii(\overline{y})$	80,73	79,72	92,73	105,78	97,71	112,84	115,10	115,38

a)

$$Ii=\frac{yi}{yo}*100\% \qquad Ii=\frac{3500}{3500}*100\%=100\% \qquad Ii=\frac{3456}{3500}*100\%=98{,}74\%$$

b)

$$Ii'=\frac{Ii}{Io}*100\% \qquad Ii'=\frac{3500}{4236}*100\%=82{,}63\% \qquad Ii'=\frac{3456}{4236}*100\%=81{,}59\%$$

v)

$$\overline{y}=\frac{\sum y_i}{n}=\frac{34682}{8}=4335{,}25 \qquad Ii=\frac{yi}{\overline{y}}*100\% \qquad Ii=\frac{3500}{4335{,}25}*100\%=80{,}73\%$$

2. Na osnovu podataka o broju utovljenih svinja u periodu između 2008. i 2015. godine farmi za tov svinja izračunajte:

a) Bazne indekse sa bazom u 2009. godini.

b) Preračunati prethodno dobijene bazne indekse na novu bazu (2014. godina).

Godina	2008.	2009.	2010.	2011.	2012.	2013.	2014.	2015.
Broj svinja (y_i) (u 000)	102	124	174	165	146	95	101	109

Rešenje zadatka prilagoditi po ugledu na prethodni zadatak.

3. Na osnovu podataka o proizvodnji ženskih majica u periodu od 2008 – 2015. godine odredite:

a) Lančane (verižne) indekse.

b) Dobijene lančane indekse preračunati na indekse sa bazom u 2012. godini.

Godina	2008.	2009.	2010.	2011.	2012.	2013.	2014.	2015.
Obim proizvodnje (y_i) (u 000)	63	53	59	60	71	69	64	75

Rešenje:

Godina	2008.	2009.	2010.	2011.	2012.	2013.	2014.	2015.
Obim proizvo-dnje (y_i) (u 000)	63	53	59	60	71	69	64	75
Vi	-	84,13	111,32	101,69	118,33	97,18	92,75	117,19
$Ii_{(2012)}$	88,73	74,65	83,10	84,51	100,00	97,18	90,14	105,63
Preraču-nati Vi na bazne sa bazom u 2012. godini	88,73	74,65	83,10	84,51	100	97,18	90,14	105,63

a)

$$Vi=\frac{yi}{yi-1}*100\% \qquad Vi=\frac{53}{63}*100\%=84,13\% \qquad Vi=\frac{59}{53}*100\%=111,32\%$$

b)

$$Ii=\frac{yi}{yo}*100\% \qquad Ii=\frac{63}{71}*100\%=88,73\% \qquad Ii=\frac{53}{71}*100\%=74,65\%$$

Preračunati lančani indeksi na bazne sa bazom u 2012. godini:

-godine koje prethode baznoj godini:

$$I_{i\text{-}1}=\frac{Ii}{Vi}*100\% \qquad I_{i\text{-}1}=\frac{74,65}{84,13}*100\%=88,73\% \qquad I_{i\text{-}1}=\frac{83,10}{111,32}*100\%=74,65\% \ ...$$

-godine koje slede nakon bazne godine:

$$Ii=\frac{Ii-1*Vi}{100} \qquad Ii=\frac{100*97,18}{100}=97,18\% \qquad Ii=\frac{97,18*92,75}{100}=90,14\% \ ...$$

4. Podaci o prosečnim cenama pojedinih proizvoda u Leskovcu u periodu između 2012-2014. godine dati su u tabeli. Odredite:

a) Individualne indekse prodaje ako je bazna godina 2012.

b) Grupne indekse fizičkog obima prodaje sa ponderima iz baznog perioda ako je bazna godina 2013 koristeći metod agregata.

Godine	Pegle		Mikseri		Blenderi	
	Kom.	Cena (1000 din.)	Kom.	Cena (1000 din.)	Kom.	Cena (1000 din.)
2012.	5000	3	3000	3,5	3200	2,5
2013.	5500	4	3600	4	2600	3,9
2014.	8000	5	4200	4,8	3900	4,6

Rešenje:

a) Individualni indeksi količine za pegle:

$$Iq=\frac{qi}{qo}*100\% \qquad (2013)\ Iq=\frac{5500}{5000}*100=110\% \qquad (2014)\ Iq=\frac{8000}{5000}*100\%=160\%$$

Individualni indeksi količine za miksere:

$$(2013)\ Iq=\frac{3600}{3000}*100=120\% \qquad (2014)\ Iq=\frac{4200}{3000}*100=140\%$$

Individualni indeksi količine za blendere:

(2013) $Iq=\frac{2600}{3200}*100=81{,}25\%$ (2014) $Iq=\frac{3900}{3200}*100=121{,}88\%$

b)

$$oIq=\frac{\sum qipo}{\sum qopo}*100\%$$

(2012) $oIq=\frac{5000*4+3000*4+3200*3{,}9}{5500*4+3600*4+2600*3{,}9}*100\%=\frac{44480}{46540}*100=95{,}57\%$

(2014) $oIq=\frac{8000*4+4200*4+3900*3{,}9}{5500*4+3600*4+2600*3{,}9}*100\%=\frac{64010}{46540}*100=137{,}54\%$

Pod pretpostavkom da su cene u obe posmatrane godine bile kao u baznom periodu u 2012. godini prodate količine gore navedenih proizvoda bile su u proseku za 4,43% manje nego u baznom periodu, a u 2014. godini u proseku veće za 37,54% nego u baznom periodu.

5. Podaci o prosečnim cenama pojedinih proizvoda u Leskovcu u periodu između 2014-2015. godine dati su u tabeli. Odredite (baza=2014. godina):

a) Individualne indekse količine.

b) Grupne indekse količine sa ponderima iz tekućeg perioda ako je bazna godina 2014. godina koristeći metod agregata.

Proizvodi	Količina		Prosečne cene	
	2014.	2015.	2014.	2015.
	(q_0)	(q_1)	(p_0)	(p_1)
Šećer	310	400	7	18
So	320	520	19	23
Brašno	450	900	14	20

Rešenje:

Proizvodi	Količina		Prosečne cene				
	2014.	2015.	2014.	2015.			
	(q_0)	(q_1)	(p_0)	(p_1)	Iq=(qi/qo) *100%	qipi	qopi
Šećer	310	400	7	18	129,03	7200	5580
So	320	520	19	23	162,50	11960	7360
Brašno	450	900	14	20	200,00	18000	9000
Σ	-	-	-	-	-	37160	21940

a) Rešenje je dato u šestoj koloni prethodne tabele.

b) $iIq=\frac{\sum qipi}{\sum qopi}*100\%$ $iIq=\frac{37160}{21940}*100=169{,}37\%$

6. Podaci o prosečnim cenama pojedinih proizvoda u Leskovcu u poslednja tri meseca 2015. godine dati su u tabeli. Odredite (baza=oktobar):

a) Individualne indekse cene.

b) Grupne indekse cene sa ponderima iz tekućeg perioda koristeći metod srednjih vrednosti.

v) Grupne indekse cene sa ponderima iz baznog perioda koristeći metod srednjih vrednosti.

Mesec	Oktobar		Novembar		Decembar	
	p	q	p	q	p	q
Mleko	65	1200	60	900	67	960
Pavlaka	50	1500	55	800	53	900
Sir	250	900	300	1600	400	1600

Rešenje:

a) Individualni indeksi cene za mleko:

$$Ip=\frac{p_i}{p_o}*100\%$$

$$_{Novembar}Ip=\frac{60}{65}*100=92{,}31\% \qquad _{Decembar}Ip=\frac{67}{65}*100\%=103{,}08\%$$

Individualni indeksi cene za pavlaku:

$$_{Novembar}Ip=\frac{55}{50}*100=110\% \qquad _{Decembar}Ip=\frac{53}{50}*100\%=106\%$$

Individualni indeksi cene za sir:

$$_{Novembar}Ip=\frac{300}{250}*100=120\% \qquad _{Decembar}Ip=\frac{400}{250}*100\%=160\%$$

b) Grupni indeks cena sa ponderom iz tekućeg perioda za mesec novembar:

Mesec	pi/po	qopo	qipi	(pi/po)*qopo	(pi/po)*qipi
Mleko	0,92	78000	54000	72000	49846,15
Pavlaka	1,10	75000	44000	82500	48400,00
Sir	1,20	225000	480000	270000	576000,00

Zbir kolone (pi/po)*qopo=424500, zbir kolone (pi/po)*qipi=674246,15, zbir kolone qopo=378000, a kolone qipi=674246,15

$$\text{iIp} = \frac{578000}{674246{,}15} * 100\% = 85{,}73\%$$

Na isti način izračunati grupni indeks cena sa ponderom iz tekućeg perioda za decembar.

v) Grupni indeks cena sa ponderom iz baznog perioda za mesec novembar:

$$\text{oIp} = \frac{424500}{378000} * 100\% = 112{,}30\%$$

Na isti način izračunati grupni indeks cena sa ponderom iz baznog perioda za decembar.

7. Na osnovu podataka o kretanju cene akcija jednog preduzeća za vremenski period od 12 dana odredite:

Dan	Cena	Dan	Cena	Dan	Cena
1	30	5	32	9	40
2	34	6	31	10	42
3	35	7	36	11	41
4	38	8	39	12	36

a) Odredite individualni indeks cena ako je baza=prva četri dana.

b) Odredite individualni indeks cena ako je baza=poslednja četri dana.

Rešenje zadatka prilagoditi po ugledu na prethodni zadatak.

8. Podaci o prosečnim cenama pojedinih proizvoda u piljari za dva dana dati su u tabeli. Odredite (baza=ponedeljak):

a) Individualne indekse cene.

b) Grupne indekse cene sa ponderima iz baznog perioda.

b) Grupne indekse cene sa ponderima iz tekućeg perioda.

Voće	Ponedeljak		Petak	
	Qo	po	qi	pi
Jabuka	300	50	350	55
Lubenica	400	15	500	10
Limun	50	360	68	370

Rešenje zadatka prilagoditi po ugledu na prethodni zadatak.

9. Prosečne cene specijaliteta koje nudi jedna kafana date su u narednoj tabeli.

Mesec	Teleće šnicle	Piletina	Riba
Januar	7.12	6.45	5.39
Februar	7.41	6.40	5.21
Mart	7.45	6.25	5.25
April	7.70	6.60	5.40
Maj	7.72	6.70	5.45
Jun	7.75	6.85	5.60
Jul	8.10	6.90	5.54
Avgust	8.15	6.84	5.70
Septembar	8.20	6.96	5.72
Oktobar	8.30	7.10	5.69
Novembar	8.45	7.10	5.85
Decembar	8.65	7.14	6.21

U sledećoj tabeli dati su podaci o broju porudžbina specijaliteta kafane u toku svakog meseca.

Mesec	Teleće šnicle	Piletina	Riba
Januar	123	169	243
Februar	110	160	251
Mart	115	181	265
April	101	152	231
Maj	118	140	163
Jun	100	128	137
Jul	92	129	221
Avgust	87	130	204
Septembar	123	164	293
Oktobar	131	169	301
Novembar	136	’76	327
Decembar	149	193	351

Izračunajte grupne indekse cene i količine sa ponderima iz baznog i tekućeg perioda. Primenom odgovarajućih formula odredite Fišerov indeks cene i količine.

Rešenje zadatka prilagoditi po ugledu na prethodni zadatak.

10. U jednoj biblioteci nabavljaju se knjige i zbornici radova. Tabela u nastavku sadrži podatke o cenama i količinama nabavljenih od strane posmatrane biblioteke.

	Knjige		Zbornike radova	
Godine	Cena (p)	Količina (q)	Cena (p)	Količina (q)
1	13000	1200	10000	1000
2	15000	2723	12000	900
3	14500	2155	12500	700
4	13600	1569	11000	750
5	12700	1222	14500	960

Izračunajte grupne indekse cene i količine sa ponderima iz baznog i tekućeg perioda. Primenom odgovarajućih formula odredite Fišerov indeks cene i količine.

Rešenje zadatka prilagoditi po ugledu na prethodni zadatak.

11. Podaci o prosečnim cenama pojedinih proizvoda u fabrici po godinama dati su u tabeli. Odredite (baza=2014. godina):

a) Individualni indeks vrednosti.

b) Grupni indeks vrednosti.

Mlečni proizvodi	Proizvodnja u 1000 l		Prosečna cena u dinarima	
	2014.	2015.	2014.	2015.
Mleko	100	150	64	60
Slatka pavlaka	160	145	70	73
Kisela pavlaka	190	180	45	50

Rešenje:

a) Individualni indeksi se izračunavaju prema formuli:

$$Ipq=\frac{piqi}{poqo}*100\%$$

Za mleko individualni indeks se računa na sledeći način:

$$Ipq=\frac{9000}{6400}*100\%=140{,}62\%$$

Koristeći dobijene obračune u tabeli izračunajte ostale individualne indekse.

Mlečni proizvodi	Proizvodnja u 1000 l		Prosečna cena u dinarima			
	2014. qo	2015. qi	2014. po	2015. pi	qipi	qopo
Mleko	100	150	64	60	9000	6400
Slatka pavlaka	160	145	70	73	10585	11200
Kisela pavlaka	190	180	45	50	9000	8550

Zbir kolone qipi=28585, a zbir kolone qopo=26150.

b) Grupni indeks vrednosti izračunava se pomoću formule:

$$Ipq=\frac{\Sigma piqi}{\Sigma poqo}*100\% \qquad Ipq=\frac{28585}{26150}*100\%=109,31\%.$$

12. Na osnovu dostupnih podataka troškovi života četvoročlane porodice za mesec mart iznose 20000 dinara. Procenite koliko će četvoročlana porodica morati da obezbedi novca za život u aprilu ukoliko se ocenjuje indeks troškova života za april mesec u iznosu od 130%.

Rešenje:

$$Ip=\frac{\Sigma piq}{\Sigma poq}*100\% \qquad 130\%=\frac{\Sigma piq}{20000}*100\% \qquad 130*20000=100\%*\Sigma piq$$

$$2600000/100=\Sigma piq \qquad 26000=\Sigma piq.$$

Troškovi života četvoročlane porodice u mesecu aprilu iznosiće 26000 dinara.

13. Podaci o broju zaposlenih i njihovim zaradama dati su u narednoj tabeli.

Stručna sprema	Broj zaposlenih		Ukupan iznos isplaćenih mesečnih zarada (000 din)	
	2014.	2015.	2014.	2015.
Visoka	6	4	360	400
Viša	25	29	625	630
Srednja	40	55	800	830

Na osnovu podataka iz tabele izračunajte (baza=2014. godina):

a) Individualne indekse zarada po pojedinim kategorijama zaposlenih.

b) Grupni indeks nominalnih zarada nepromenljivog sastava zaposlenih.

v) Grupni indeks nominalnih zarada promenljivog sastava zaposlenih.

a) Prosečna plata radnika u baznom periodu 2014. godine izračunava se formulom: $\overline{xo} = \frac{xo}{Ro}$, a u tekućem periodu 2015. formulom: $\overline{xi} = \frac{xi}{Ri}$.

Stručna sprema	Ro (2014.)	Ri (2015.)	Xo(2014.)	Xi (2015.)	Prosečna plata $\overline{xo}$	Prosečna plata $\overline{xi}$
Visoka	6	4	360	400	60	100
Viša	25	29	625	630	25	21,72
Srednja	40	55	800	830	20	15,09
Σ	71	88	1785	1860	105	136,82

Individualni indeks plata za svaku kategoriju radnika računa se na sledeći način:
Visoka sprema:

$$Ipe(z) = \frac{\overline{xi}}{\overline{xo}} *100\% = \frac{100}{60} *100\% = 166{,}67\%$$

Plata zaposlenih sa visokom stručnom spremom veća je za 66,67% u 2015. godini u odnosu na 2014. godinu.
Viša sprema:

$$Ipe(z) = \frac{\overline{xi}}{\overline{xo}} *100\% = \frac{21{,}72}{25} *100\% = 86{,}90\%$$

Plata zaposlenih sa višom stručnom spremom manja je za 13,1% u 2015. godini u odnosu na 2014. godinu.
Srednja sprema:

$$Ipe(z) = \frac{\overline{xi}}{\overline{xo}} *100\% = \frac{15{,}09}{20} *100\% = 75{,}45\%$$

Plata zaposlenih sa srednjom stručnom spremom manja je za 24,55 % u 2015. godini u odnosu na 2014. godinu.

b)

$$Ipe(z) = \frac{\Sigma \overline{xi}}{\Sigma \overline{xo}} *100\% = \frac{136{,}82}{105} *100\% = 130{,}3\%$$

Došlo je do ukupnog porasta zarada svih zaposlenih za 30,3%.

Grupni indeks zarada za nepromenljiv sastav zaposlenih se računa na sledeći način:

Ipe(z)	Ipe(z)*Ri
1,67	6,67
0,87	25,20
0,75	41,50
1,30	114,66

$$\overset{|}{I}pe(z) = \frac{\Sigma Ipe(z) * Ri}{\Sigma Ri} * 100\% = \frac{144{,}66}{88} * 100\% = 164{,}39\%$$

Ukoliko isključimo iz analize promenu sastava zaposlenih grupni indeks zarada pokazuje da je došlo do porasta zarada u tekućoj u odnosu na prethodnu godinu za 64,39%.

v) Uticaj promena u strukturi zaposlenih na promene zarada utvrđuje se na sledeći način:

Ipe(z)/Ipe(z)'=1,303/1,1466*100%=1,1364*100=113,64%

Promene u strukturi zaposlenih uticale su na povećanje iznosa zarada za 13,64%.

14. Na osnovu podataka datih u tabeli izračunajte:

Stručna sprema	Broj radnika 2014. Ro	Broj radnika 2015. Ri	Suma plata (000) xo	Suma plata (000) xi
VKV	42	49	23000	22500
KV	65	71	21000	23000
PKV	42	57	18000	21000
NKV	29	39	15000	20000
Σ	178	216	77000	86500

a) Individualne indekse zarada po pojedinim kategorijama zaposlenih.

b) Grupni indeks nominalnih zarada nepromenljivog sastava zaposlenih.

v) Grupni indeks nominalnih zarada promenljivog sastava zaposlenih.

Rešenje zadatka prilagoditi po ugledu na prethodni zadatak.

15. Podaci o broju zaposlenih i njihovim zaradama dati su u narednoj tabeli.

Stručna sprema	Broj zaposlenih		Ukupan iznos isplaćenih mesečnih zarada (000 din)	
	2014.	2015.	2014.	2015.
Visoka	6	4	360	400
Viša	25	29	625	630
Srednja	40	55	800	830

Na osnovu podataka iz tabele izračunajte (baza=2014. godina):

a) Grupni indeks nominalnih zarada nepromenljivog sastava zaposlenih.

Rešenje zadatka prilagoditi po ugledu na prethodni zadatak.

STATISTIČKO OBUHVATANJE FAKTORA PROIZVODNJE

1. U jednom preduzeću radi 15 mašina. Proizvodna sposobnost mašine je 30 komada proizvoda po smeni. Radi se u 2 smene. Mogući fond radnog vremena je 300 dana. Ako se za 296 dana ostvari 253000 proizvoda, izračunaj pokazatelje iskorišćenja kapaciteta.

Rešenje:

$$Kek=\frac{Ostvareno\ vreme\ rada}{Moguće\ vreme\ rada}*100\%=\frac{296}{300}*100\%=98{,}67\%$$

Gubitak u iskorišćenju kapaciteta usled nedovoljnog vremenskog angažovanja kapaciteta izosi 1,33%.

$$\frac{Ostvarena\ proizvodnja}{po\ jedinici\ kapaciteta}=\frac{253000}{296*2*15}=28{,}49$$

$$Kik=\frac{Ostvarena\ proizvodnja\ po\ jedinici\ kapaciteta}{Moguća\ proizvodnja\ po\ jedinici\ kapaciteta}*100\%=\frac{28{,}49}{30}*100\%=94{,}97\%$$

Gubitak zbog nedovoljno intenzivnog korišćenja kapaciteta iznosi 5,03%.

$$Kiik=\frac{Ostvarena\ godišnja\ proizvodnja}{Mogući\ godišnji\ kapacitet}*100\%=\frac{253000}{15*30*2*300}*100\%=93{,}70\%$$

Sve je to dovelo do ukupnog gubitka u iskorišćenju kapaciteta od 6,30%.

2. U toku juna meseca ostvareno je 160000 radnik-časova za 28 radnih dana. Prosečno je na posao dolazilo 730 radnika, što je 89% ukupnog broja zaposlenih. Radi se 8 časova.

a) Odredi mogući fond časova rada i
b) Koeficijent integralnog iskorišćenja radnog vremena.

$$Ukupan\ broj\ zaposlenih=\frac{730*100}{89}=820{,}22$$

Mogući fond časova rada= 820,22*8*28=183729,28

$$Kiirv=\frac{Ostvareni\ efektivni\ časovi\ rada\ radnika}{Mogući\ fond\ časova\ rada\ radnika}*100\%=\frac{160000}{183729{,}28}*100\%$$

Kiirv =87,08%

U preduzeću je došlo do gubitka radnog vremena u iznosu od 12,92% zbog izostajanja radnika sa posla, ali i zbog nedovoljnog iskorišćenja radnog dana onih radnika koji su dolazili na posao.

3. Godišnja proizvodnja jedne pekare je 408000 kg hleba. Moguće i ostvareno vreme rada je 358 dana. Proizvodni kapaciteti pekare iskorišćeni su sa 85%. Odredi ostvarenu i moguću dnevnu proizvodnju.

Rešenja:

$$\text{Ostvarena dnevna proizvodnja}=\frac{480000}{358}=1340{,}78$$

$$\text{Moguća dnevna proizvodnja}=\frac{1340{,}78*100}{85}=1577{,}39$$

4. U preduzeću sa 3900 radnika, u maju mesecu ostvareno je 27 radnih dana, 100000 radnik-dana i 590000 radnik-časova i prosečno je dolazilo na posao 3703,70 radnika. Izračunajte pokazatelje iskorišćenja radnog vremena ukoliko je, prosečno trajanje radnog dana 5,9 časova, a mogući fond časova rada 842400 i radi se 8 sati.

Rešenje:

$$\text{Kirs}=\frac{\text{Prosečan broj zaposlenih}}{\text{Ukupan broj zaposlenih}}*100\%=\frac{3703{,}70}{3900}*100\%=94{,}97\%$$

$$\text{Kird}=\frac{\text{Prosečno trajanje radnog dana}}{7\ (8)}=\frac{5{,}9}{8}*100\%=73{,}75\%$$

$$\text{Kiirv}=\frac{\text{Ostvareni efektivni časovi rada radnika}}{\text{Mogući fond časova rada radnika}}*100\%=\frac{590000}{842400}*100\%$$

$$\text{Kiirv}=70{,}04\%$$

U preduzeću je došlo do gubitka radnog vremena u iznosu od 5,03% zbog izostajanja radnika sa posla, 26,25% zbog nedovoljnog iskorišćenja radnog dana onih radnika koji su dolazili na posao, a sve to je dovelo do ukupnog gubitka u iskorišćenju radnog vremena u iznosu od 29,96%.

5. Godišnja proizvodnja jedne pekare je 187000kg peciva. Moguće i ostvareno vreme rada je 353 dana. Proizvodni kapaciteti pekare iskorišćeni su sa 98%.
a) Utvrdi moguću i ostvarenu dnevnu proizvodnju.

Rešenje:

$$\text{Ostvarena dnevna proizvodnja}=\frac{187000}{353}=529{,}75$$

$$\text{Moguća dnevna proizvodnja}=\frac{529{,}75*100}{98}=540{,}56$$

6. U preduzeću sa 3900 radnika, u maju mesecu ostvareno je 23 radnih dana, 86000 radnik-dana i 559000 radnik-časova. Izračunajte pokazatelje iskorišćenja radnog vremena ukoliko je prosečan broj zaposlenih 3739, prosečno trajanje radnog dana 6,5 časova, a mogući fond časova rada 627900 i radi se 7 sati.

Rešenje:

$$\text{Kirs}=\frac{\text{Prosečan broj zaposlenih}}{\text{Ukupan broj zaposlenih}}*100\%=\frac{3739}{3900}*100\%=95{,}87\%$$

$$\text{Kird}=\frac{\text{Prosečno trajanje radnog dana}}{7\ (8)}=\frac{6{,}5}{7}*100\%=92{,}86\%$$

$$\text{Kiirv}=\frac{\text{Ostvareni efektivni časovi rada radnika}}{\text{Mogući fond časova rada radnika}}*100\%=\frac{559000}{627900}*100\%=89{,}03\%$$

U preduzeću je došlo do gubitka radnog vremena u iznosu od 4,13% zbog izostajanja radnika sa posla, 7,14% zbog nedovoljnog iskorišćenja radnog dana onih radnika koji su dolazili na posao, a sve to je dovelo do ukupnog gubitka u iskorišćenju radnog vremena u izosu od 10,97%.

7. 2007 radnika jednog preduzeća dolazilo je redovno na posao u toku septembra meseca 23 radnih dana i ostvarilo je 165 000 radnik časova. Izračunaj pokazatelje iskorišćenja radnog vremena. Radi se 7h.

Rešenje:

$$\text{Kirs}=\frac{\text{Prosečan broj zaposlenih}}{\text{Ukupan broj zaposlenih}}*100\%=\frac{2007}{2007}*100\%=100\%$$

$$\text{Radnik dani}=2007*23=46161$$

$$\text{Prosečno trajanje radnog dana}=\frac{165000}{46161}=3{,}57$$

$$\text{Mogući fond časova rada}=7*23*2007=323127$$

$$Kird=\frac{\text{Prosečno trajanje radnog dana}}{7\ (8)}=\frac{3,57}{7}*100\%=51\%$$

$$Kiirv=\frac{\text{Ostvareni efektivni časovi rada radnika}}{\text{Mogući fond časova rada radnika}}*100\%=\frac{165000}{323127}*100\%=51,06\%$$

U preduzeću je došlo do gubitka u iskorišćenju radnog vremena u iznosu od 49% zbog nedovoljnog iskorišćenja radnog dana što je dovelo do ukupnog gubitka u iskorišćenju radnog vremena u iznosu od 48,94%.

8. U preduzeću sa 400 zaposlenih, u toku juna meseca 2015. godine, za 20 radnih dana u trajanju od 8^h ostvareno je 7600 radnik – dana, i 55000 radnik – časova. Izračunaj pokazatelje iskorišćenja radnog vremena.

Rešenje:

$$\text{Prosečan broj zaposlenih}=\frac{7600}{20}=380$$

$$\text{Prosečno trajanje radnog dana}=\frac{55000}{7600}=7,24$$

$$Kirs=\frac{\text{Prosečan broj zaposlenih}}{\text{Ukupan broj zaposlenih}}*100\%=\frac{380}{400}*100\%=95\%$$

$$Kird=\frac{\text{Prosečno trajanje radnog dana}}{7\ (8)}=\frac{7,24}{8}*100\%=90,5\%$$

$$Kiirv=\frac{\text{Ostvareni efektivni časovi rada radnika}}{\text{Mogući fond časova rada radnika}}*100\%=\frac{55000}{400*8*20}*100\%=85,94\%$$

U preduzeću je došlo do gubitka radnog vremena u iznosu od 5% zbog izostajanja radnika sa posla, 9,5% zbog nedovoljnog iskorišćenja radnog dana onih radnika koji su dolazili na posao, a sve to je dovelo do ukupnog gubitka u iskorišćenju radnog vremena u izosu od 14,06%.

9. U preduzeću od 850 zaposlenih radnika u toku decembra meseca, ostvareno je za 30 radnih dana u trajanju od 7h 22500 radnik dana i 150750 radnik časova. Izračunaj pokazatelje iskorišćenja radnog vremena.

Rešenje:

$$\text{Prosečan broj zaposlenih}=\frac{22500}{30}=750$$

$$\text{Prosečno trajanje radnog dana}=\frac{150750}{22500}=6,7$$

$$Kirs=\frac{\text{Prosečan broj zaposlenih}}{\text{Ukupan broj zaposlenih}}*100\%=\frac{750}{850}*100\%=88{,}24\%$$

$$Kird=\frac{\text{Prosečno trajanje radnog dana}}{7\ (8)}=\frac{6{,}7}{7}*100\%=95{,}71\%$$

$$Kiirv=\frac{\text{Ostvareni efektivni časovi rada radnika}}{\text{Mogući fond časova rada radnika}}*100\%=\frac{150750}{850*7*30}*100\%=84{,}45\%$$

U preduzeću je došlo do gubitka radnog vremena u iznosu od 11,76% zbog izostajanja radnika sa posla, 4,29% zbog nedovoljnog iskorišćenja radnog dana onih radnika koji su dolazili na posao, a sve to je dovelo do ukupnog gubitka u iskorišćenju radnog vremena u izosu od 15,55%.

10. Radeći u tri smene 89 radnih dana po 7h na 25 mašina proizvedeno je 1000000 komada proizvoda „L". Mogući fond radnog vremena je 120 dana. Koliko su iskorišćeni kapaciteti ako je satni kapacitet mašine 27 komada proizvoda?

Rešenje:

$$\text{Ostvarena proizvodnja po jed. kap.}=\frac{1000000}{3*7*25*89}=21{,}40$$

$$\text{Moguća godišnja proizvodnja}=3*7*120*27*25=1701000$$

$$Kek=\frac{\text{Ostvareno vreme rada}}{\text{Moguće vreme rada}}*100\%=\frac{89}{120}*100\%=74{,}17\%$$

Gubitak u iskorišćenju kapaciteta usled nedovoljnog vremenskog angažovanja kapaciteta iznosi 25,83%.

$$Kik=\frac{\text{Ostvarena proizvodnja po jedinici kapaciteta}}{\text{Moguća proizvodnja po jedinici kapaciteta}}*100\%=\frac{21{,}40}{27}*100\%=79{,}26\%$$

Zbog nedovoljno intenzivnog iskorišćenja kapaciteta gubitak je 20,74%.

$$Kiik=\frac{\text{Ostvarena godišnja proizvodnja}}{\text{Mogući godišnji kapacitet}}*100\%=\frac{1000000}{1701000}*100\%=58{,}79\%$$

Ukupni gubitak u iskorišćenju kapaciteta iznosi 41,21%.

11. Jedno preduzeće radi na 10 mašina istovremeno i proizvede po 4 komada proizvoda „D" po smeni. Radi se u tri smene i za 310 dana proizvedeno je 2900 komada proizvoda „D". Izračunaj pokazatelje iskorišćenja kapaciteta.

Rešenje zadatka prilagoditi po ugledu na prethodni zadatak.

12. Preduzeće radeći na 9 mašina proizvede 7 komada proizvoda „K“ za jednu smenu. Radi se 3 smene i za 328 dana proizvedeno je 5100 komada proizvoda „K“. Izračunaj sve koeficijente iskorišćenja kapaciteta.

Rešenje zadatka prilagoditi po ugledu na prethodni zadatak.

13. Jedno preduzeće radi na 13 mašina istovremeno i proizvede po 30 komada proizvoda „I“ dnevno. Radi se u dve smene i za 310 dana proizvedeno je 8600 komada proizvoda „I“. Izračunaj pokazatelje iskorišćenja kapaciteta.

Rešenje zadatka prilagoditi po ugledu na prethodni zadatak.

14. U preduzeću sa 650 zaposlenih, u toku oktobra meseca 2015. godine, za 27 radnih dana u trajanju od 8^h ostvareno je 16000 radnik – dana i 119340 radnik – časova. Izračunaj pokazatelje iskorišćenja radnog vremena.

Rešenje zadatka prilagoditi po ugledu na prethodne zadatke.

15. Ukupan nominalni utrošak materijala jednog preduzeća u toku godine bio je 870000, a ukupan stvarni utrošak 900000. Izračunaj koeficijent iskorišćenja sirovina.

Rešenje:

$$\text{Koeficijent iskorišćenosti sirovina}=\frac{\text{Normirani utrošak - Stvarni utrošak}}{\text{Ukupni normirani utrošak}}*100\%$$

$$\text{Koeficijent iskorišćenosti sirovina}=\frac{870000-900000}{870000}*100\%$$

$$\text{Koeficijent iskorišćenosti sirovina}=\frac{-30000}{870000}*100= -3{,}45\%$$

Došlo je do prekoračenja normiranog utroška za 3,45%. Neophodno je otkriti razloge njegove pojave.

STATISTIČKE TABLICE

Tabela 22. Binomni koeficijenti

$$\binom{n}{v} = \frac{n!}{v!(n-v)!} \qquad \binom{n}{v} = \binom{n}{n-v}$$

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\binom{n}{8}$	$\binom{n}{9}$	$\binom{n}{10}$
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66
13	1	13	78	286	715	1.287	1.716	1.716	1.287	715	286
14	1	14	91	364	1.001	2.002	3.003	3.432	3.003	2.002	1.001
15	1	15	105	455	1.365	3.003	5.005	6.435	6.435	5.005	3.003
16	1	16	120	560	1.820	4.368	8.008	11.440	12.870	11.440	8.008
17	1	17	136	680	2.380	6.188	12.376	19.448	24.310	24.310	19.448
18	1	18	153	816	3.060	8.568	18.564	31.824	43.758	48.620	43.758
19	1	19	171	969	3.876	11.628	27.132	50.388	75.582	92.378	92.378
20	1	20	190	1.140	4.845	15.504	38.760	77.520	125.970	167.960	184.756

Tabela 23. Normalni raspored (Zakon verovatnoće)

X	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,
0,0	39894	39892	39886	39876	39862	39844	39822	39797	39767	39733
0,1	39695	39654	39608	39559	39505	39448	39387	39322	39253	39181
0,2	39104	39024	38940	38853	38762	38677	38568	38466	38361	38251
0,3	38139	38023	37903	37780	37654	37524	37391	37255	37115	36973
0,4	36827	36678	36526	36371	36213	36053	35889	35723	35553	35381
0,5	35207	35029	34849	34667	34482	34294	34105	33912	33718	33521
0,6	33322	33121	32918	32713	32506	32297	32086	31874	31659	31443
0,7	31225	31006	30785	30563	30339	30114	29887	29659	29431	29200
0,8	28969	28737	28504	28269	28034	27798	27562	27324	27086	26868
0,9	26609	26369	26129	25888	25647	25406	25164	24923	24681	24439
1,0	24197	23955	23713	23471	23230	22988	22747	22506	22625	22025
1,1	21785	21546	21307	21069	20831	20594	20357	20121	19886	19652
1,2	19419	19186	18954	18724	18494	18265	18037	17810	17585	17360
1,3	17137	16915	16694	16474	16256	16038	15822	15608	15395	15183
1,4	14973	14764	14556	14350	14146	13943	13742	13542	13344	13147
1,5	12952	12758	12566	12376	12188	12001	11816	11632	11450	11270
1,6	11092	10915	10741	10567	10396	10226	10059	09893	09728	09566
1,7	09405	09246	09089	08933	08780	08628	08478	08329	08183	08038
1,8	07895	07754	07614	07477	07341	07206	07074	06943	06814	06687
1,9	06562	06438	06316	06195	06077	05959	05844	05730	05618	05508
2,0	05399	05292	05186	05082	04980	04879	04780	04682	04586	04491
2,1	04398	04307	04217	04128	04041	03955	03871	03788	03706	03626
2,2	03547	03470	03394	03319	03246	03174	03103	03034	02965	02898
2,3	02833	02768	02705	02643	02582	02522	02463	02406	02349	02294
2,4	02239	02186	02134	02083	02033	01984	01936	01888	01842	01797
2,5	01753	01709	01667	01625	01585	01545	01506	01468	01431	01394
2,6	01358	01323	01289	01256	01223	01191	01160	01130	01100	01071
2,0	01042	01014	00987	00961	0,616	00909	00885	00861	00837	00814
2,8	00792	00770	00748	00727	00707	00687	00668	00649	00631	00613
2,9	00595	00578	00562	00545	00530	00514	00499	00485	00470	00457
3,0	00443	00430	00417	00405	00393	00381	00370	00358	00348	00337
3,1	00327	00317	00307	00298	00288	00279	00271	00262	00254	00246
3,2	00238	00231	00224	00216	00210	00203	00196	00190	00184	00178
3,3	00172	00167	00161	00156	00151	00146	00141	00136	00132	00127
3,4	00123	00119	00115	00111	00107	00104	00100	00097	00094	00090
3,5	00087	00084	00081	00079	00076	00073	00071	00068	00066	00063
3,6	00061	00059	00057	00055	00053	00051	00049	00047	00046	00044
3,7	00042	00041	00039	00038	00037	00035	00034	00033	00031	00030
3,8	00029	00028	00027	00026	00025	00024	00023	00022	00021	00021
3,9	00020	00019	00018	00018	00017	00016	00016	00015	00014	00014
4,0	00013	00013	00012	00012	00011	00011	00011	00010	00010	00009

Tabela 24. Normalan raspored (Funkcija rasporeda)

X	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,
0,0	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0,9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8990	8997	9015
1,3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1,4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1,5	9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1,6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1,7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1,8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1,9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2,0	9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2,1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2,2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2,3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2,4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2,5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2,6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2,7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2,8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2,9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3,0	9987	9987	9987	9988	9989	9989	9989	9989	9990	9990
3,1	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993
3,2	9993	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995
3,3	9995	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997
3,4	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998

Tabela 25. χ^2 raspored

χ^2 \ ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,001	0,005									
0,01	0,08	0,005								
0,05	0,18	0,02								
0,1	0,25	0,05	0,01							
0,2	0,35	0,10	0,02	0,005						
0,3	0,42	0,14	0,04	0,01						
0,4	0,47	0,18	0,06	0,02	0,005					
0,5	0,52	0,22	0,08	0,03	0,01					
0,6	0,56	0,26	0,10	0,04	0,01					
0,7	0,60	0,30	0,13	0,05	0,02	0,005				
0,8	0,63	0,33	0,15	0,06	0,02	0,01				
0,9	0,66	0,36	0,17	0,08	0,03	0,01				
1	0,68	0,39	0,20	0,09	0,04	0,01	0,005			
2	0,84	0,63	0,43	0,26	0,15	0,08	0,04	0,02	0,01	0,005
3	0,92	0,78	0,61	0,44	0,30	0,19	0,11	0,07	0,04	0,02
4	0,95	0,86	0,74	0,59	0,45	0,32	0,22	0,14	0,09	0,07
5	0,97	0,92	0,83	0,71	0,58	0,46	0,34	0,24	0,17	0,11
6	0,99	0,95	0,89	0,80	0,69	0,58	0,46	0,35	0,26	0,18
7	0,99	0,97	0,93	0,86	0,78	0,70	0,57	0,46	0,36	0,27
8	0,995	0,98	0,95	0,91	0,84	0,76	0,67	0,57	0,47	0,37
9	0,995	0,99	0,97	0,94	0,89	0,83	0,75	0,66	0,56	0,47
10		0,995	0,98	0,96	0,92	0,88	0,81	0,73	0,65	0,56
11		**0,995**	0,99	0,97	0,95	0,91	0,86	0,80	0,72	0,64
12			0,995	0,98	0,97	0,94	0,90	0 83	0,79	0,71
13			0,995	0,99	0,98	0,96	0,93	0 89	0 83	0,78
14			0,995	0,995	0,98	0,97	0,95	0,92	0,88	0,83
15				0,995	0,99	0,98	0,96	0,94	0,91	0,87
16				0,995	1,00	0,99	0,97	0,96	0,93	0,90
17					0,995	0,99	0,98	0,97	0,95	0,93
18					0,995	0,995	0,99	0,98	0,96	0,95
19						0,995	0,99	0,99	0,97	0,96
20						0,995	0,995	0,99	0,99	0,97
21							0,995	0,995	0,99	0,98
22							0,995	0,995	0,995	0,98
23								0,995	0,995	0,99
24									0,995	0,99
25										0,995
26										0,995
27										0,995

X^2 \ ν	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2										
3	0,01	0,005								
4	0,03	0,02	0,01	0,005						
5	0,07	0,04	0,02	0,01	0,01	0,005				
6	0,13	0,09	0,06	0,03	0,02	0,01	0,005	0,005		
7	0,20	0,14	0,10	0,07	0,04	0,03	0,02	0,01	0,005	0,005
8	0,29	0,21	0,16	0,11	0,08	0,05	0,03	0,02	0,01	0,01
9	0,38	0,30	0,23	0,17	0,12	0,09	0,06	0,04	0,03	0,02
10	0,47	0,38	0,31	0,24	0,18	0,13	0,10	0,07	0,05	0,03
11	0,56	0,47	0,39	0,31	0,25	0,19	0,14	0,11	0,08	0,05
12	0,64	0,55	0,47	0,39	0,32	0,26	0,20	0,15	0,11	0,08
13	0,71	0,63	0,55	0,47	0,40	0,33	0,26	0,21	0,16	0,12
14	0,77	0,70	0,63	0,55	0,47	0,40	0,33	0,27	0,22	0,17
15	0,82	0,76	0,69	0,62	0,55	0,48	0,40	0,34	0,28	0,22
16	0,86	0,81	0,75	0,69	0,62	0,55	0,48	0,41	0,34	0,28
17	0,89	0,85	0,80	0,74	0,68	0,61	0,55	0,48	0,41	0,137
18	0,92	0,88	0,84	0,79	0,74	0,68	0,61	0,54	0,48	0,41
19	0,94	0,91	0,88	0,83	0,79	0,73	0,67	0,61	0,54	0,48
20	0,96	0,93	0,90	0,87	0,83	0,78	0,73	0,68	0,61	0,54
21	0,97	0,95	0,93	0,90	0,86	0,82	0,77	0,72	0,66	0,60
22	0,98	0,96	0,94	0,92	0,89	0,86	0,82	0,77	0,72	0,66
23	0,98	0,97	0,96	0,94	0,92	0,89	0,85	0,81	0,76	0,71
24	0,99	0,98	0,97	0,95	0,93	0,91	0,88	0,84	0,80	0,76
25	0,99	0,99	0,98	0,97	0,95	0,93	0,91	0,88	0,84	0,80
26	0,995	0,99	0,98	0,97	0,96	0,95	0,93	0,90	0,87	0,83
27	0,995	0,99	0,99	0,98	0,97	O,96	0,94	0,92	0,90	0,86
28	0,995	0,995	0,99	0,99	0,98	0,97	0,96	0,94	0,92	0,90
29		0,995	0,995	0,99	0,98	0,98	0,97	0,95	0,93	0,91
30		0,995	0,995	0,99	0,99	0,98	0,97	0,96	0,95	0,93
35						0,995	0,995	0,99	0,99	0,98
40									0,995	0,995

X^2 \ ν	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
8	0,005									
9	0,01	0,005	0,005							
10	0,02	0,01	0,01	0,005	0,005					
11	0,04	0,03	0,02	0,01	0,01	0,005				
12	0,06	0,04	0,03	0,02	0,01	0,01	0,005	0,005		
13	0,09	0,07	0,05	0,03	0,02	0,02	0,01	0,01	0,005	
14	0,13	0,10	0,07	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01	0,01	0,005
15	0,18	0,14	0,11	0,08	0,06	0,04	0,03	0,02	0,01	0,01
16	0,23	0,18	0,14	0,11	0,09	0,06	0,05	0,03	0,02	0,02
17	0,29	0,24	0,19	0,15	0,11	0,09	0,07	0,05	0,04	0,03
18	0,35	0,29	0,24	0,20	0,16	0,12	0,10	0,07	0,06	0,04
19	0,41	0,35	0,30	0,25	0,20	0,16	0,13	0,10	0,08	0,06
20	0,48	0,42	0,36	0,30	0,25	0,21	0,17	0,14	0,11	0,08
21	0,54	0,48	0,42	0,36	0,31	0,26	0,21	0,17	0,14	0,11
22	0,60	0,54	0,48	0,42	0,36	0,31	0,26	0,22	0,18	0,15
23	0,66	0,60	0,54	0,48	0,42	0,37	0,31	0,27	0,22	0,18
24	0,71	0,65	0,60	0,54	0,48	0,42	0,37	0,32	0,27	0,23
25	0,75	0,70	0,65	0,59	0,54	0,48	0,43	0,37	0,32	0,27
26	0,79	0,75	0,70	0,65	0,59	0,54	0,48	0,43	0,37	0,32
27	0,83	0,79	0,74	0,70	0,64	0,59	0,54	0,48	0,43	0,38
28	0,86	0,81	0,78	0,74	0,69	0,64	0,59	0,54	0,48	0,43
29	0,89	0,86	0,82	0,78	0,74	0,69	0,64	0,59	0,53	0,48
30	0,91	0,88	0,85	0,82	0,78	0,73	0,69	0,64	0,59	0,53
35	0,98	0,96	0,94	0,93	0,90	0,89	0,86	0,83	0,79	0,76
40	0,995	0,99	0,98	0,98	0,97	0,96	0,95	0,93	0,92	0,90
45		0,995	0,995	0,995	0,99	0,99	0,98	0,98	0,97	0,96
50						0,995	0,995	0,995	0,99	0,98

Tabela 26. Kritične vrednosti χ^2 rasporeda

v α	0,995	0,975	0,95	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
1	0,00004	0,00098	0,00393	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879
2	0,0100	0,0506	0,103	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597
3	0,0717	0,216	0,352	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838
4	0,207	0,484	0,711	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860
5	0,412	0,831	1,145	9,236	11,070	12,832	15,086	16,750
6	0,676	1,237	1,635	10,645	12,592	14,449	16,812	18,548
7	0,989	1,690	2,167	12,017	14,067	16,013	18,475	20,278
8	1,344	2,180	2,733	13,362	15,507	17,535	20,090	21,955
9	1,735	2,700	3,325	14,684	16,919	19,023	21,666	23,589
10	2,156	3,247	3,940	15,987	18,307	20,483	23,209	25,188
11	2,603	3,816	4,575	17,275	19,675	21,92	24,725	26,757
12	3,074	4,404	5,226	18,549	21,026	23,336	26,217	28,300
13	3,565	5,009	5,892	19,812	22,362	24,736	27,688	29,819
14	4,075	5,629	6,571	21,064	23,685	26,119	29,141	31,319
15	4,601	6,262	7,261	22,307	24,996	27,488	30,578	32,801
16	5,142	6,908	7,962	23,542	26,296	28,845	32,000	34,267
17	5,697	7,564	8,672	24,769	27,587	30,191	33,409	35,718
18	6,265	8,231	9,390	25,989	28,869	31,526	34,805	37,156
19	6,844	8,907	10,117	27,204	30,144	32,852	36,191	38,582
20	7,434	9,591	10,851	28,412	31,410	34,17	37,566	39,997
21	8,034	10,283	11,591	29,615	32,671	35,479	38,932	41,401
22	8,643	10,982	12,338	30,813	33,924	36,781	40,289	42,796
23	9,260	11,688	13,091	32,007	35,172	38,076	41,638	44,181
24	9,886	12,401	13,848	33,196	36,145	39,364	42,980	45,558
25	10,520	13,120	14,611	34,382	37,652	40,646	44,314	46,928
26	11,160	13,844	15,379	35,563	38,885	41,923	45,642	48,290
27	11,808	14,573	16,151	36,741	40,113	43,194	46,963	49,645
28	12,461	15,308	16,928	37,916	41,337	44,461	48,278	50,993
29	13,121	16,047	17,708	39,087	42,557	45,722	49,588	52,336
30	13,787	16,791	18,493	40,256	43,773	46,979	50,892	53,672
35	17,192	20,569	22,465	46,059	49,802	53,203	57,342	60,275
40	20,707	24,433	26,509	51,805	55,758	59,342	63,691	66,766
45	24,311	28,366	30,612	57,505	61,656	65,410	69,957	73,166
50	27,991	32,357	34,764	63,167	67,505	71.420	76,154	79,490
60	35,535	40,482	43,188	74,397	79,082	83,298	88,379	91,952
70	43,275	48,758	51,739	85,527	90,531	95,023	100,425	104,215
80	51,172	57,153	60,391	96,578	101,879	106,629	112,329	116,321
90	59,196	65,647	69,126	107,565	113,145	118,136	124,116	128,299
100	67,328	74,222	77,929	118,498	124,342	129,561	135,807	140,169

Tabela 27. Studentov t raspored verovatnoće

t_0 \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500
0,1	0,532	0,535	0,537	0,537	0,538	0,538	0,538	0,539	0,539	0,539
0,2	0,563	0,570	0,573	0,574	0,575	0,576	0,576	0,577	0,577	0,577
0,3	0,593	0,604	0,608	0,610	0,612	0,613	0,614	0,614	0,614	0,615
0,4	0,621	0,636	0,642	0,645	0,647	0,648	0,649	0,650	0,651	0,651
0,5	0,648	0,667	0,674	0,678	0,681	0,683	0,684	0,685	0,685	0,686
0,6	0,672	0,695	0,705	0,710	0,713	0,715	0,716	0,717	0,718	0,719
0,7	0,694	0,722	0,733	0,739	0,742	0,745	0,747	0,748	0,749	0,750
0,8	0,715	0,746	0,759	0,766	0,770	0,773	0,775	0,777	0,778	0,779
0,9	0,733	0,768	0,783	0,790	0,795	0,799	0,801	0,803	0,804	0,805
1,0	0,750	0,789	0,804	0,813	0,818	0,822	0,825	0,827	0,828	0,830
1,1	0,765	0,807	0,824	0,833	0,839	0,843	0,846	0,848	0,850	0,851
1,2	0,779	0,823	0,842	0,852	0,858	0,862	0,865	0,868	0,870	0,871
1,3	0,791	0,838	0,858	0,868	0,875	0,879	0,883	0,885	0,887	0,889
1,4	0,803	0,852	0,872	0,883	0,890	0,894	0,898	0,900	0,902	0,904
1,5	0,813	0,864	0,885	0,896	0,903	0,908	0,911	0,914	0,916	0,918
1,6	0,822	0,875	0,896	0,908	0,915	0,920	0,923	0,926	0,928	0,930
1,7	0,831	0,884	0,906	0,918	0,925	0,930	0,933	0,936	0,938	0,940
1,8	0,839	0,893	0,915	0,927	0,934	0,939	0,943	0,945	0,947	0,949
1,9	0,846	0,901	0,923	0,935	0,942	0,947	0,950	0,953	0,955	0,957
2,0	0,852	0,908	0,930	0,942	0,949	0,954	0,957	0,960	0,962	0,963
2,1	0,858	0,915	0,937	0,948	0,955	0,960	0,963	0,963	0,967	0,969
2,2	0,864	0,921	0,942	0,954	0,960	0,965	0,968	0,970	0,972	0,974
2,3	0,869	0,926	0,947	0,958	0,965	0,969	0,972	0,975	0,976	0,978
2,4	0,874	0,931	0,952	0,963	0,969	0,973	0,976	0,978	0,980	0,981
2,5	0,879	0,935	0,956	0,967	0,973	0,977	0,979	0,981	0,983	0,984
2,6	0,883	0,939	0,960	0,970	0,976	0,980	0,982	0,984	0,986	0,987
2,8	0,891	0,946	0,966	0,976	0,981	0,984	0,987	0,988	0,990	0,991
2,9	0,894	0,949	0,969	0,978	0,983	0,986	0,988	0,990	0,991	0,992
3,0	0,898	0,952	0,971	0,980	0,985	0,988	0,990	0,991	0,992	0,993
3,1	0,901	0,955	0,973	0,982	0,987	0,989	0,991	0,993	0,994	0,994
3,2	0,904	0,957	0,975	0,983	0,988	0,991	0,992	0,994	0,995	0,995
3,3	0,906	0,960	0,977	0,985	0,989	0,992	0,993	0,995	0,995	0,996
3,4	0,909	0,962	0,979	0,986	0,990	0,993	0,994	0,995	0,996	0,997
3,5	0,911	0,964	0,980	0,988	0,991	0,994	0,995	0,996	0,997	0,997
3,6	0,914	0,965	0,982	0,989	0,992	0,994	0,996	0,996	0,997	0,998
3,7	0,916	0,967	0,983	0,990	0,993	0,995	0,996	0,997	0,997	0,998
3,8	0,918	0,969	0,984	0,990	0,994	0,995	0,997	0,997	0,998	0,998
3,9	0,920	0,970	0,985	0,991	0,994	0,996	0,997	0,998	0,998	0,998
4,0	0,922	0,971	0,986	0,992	0,995	0,996	0,997	0,998	0,998	0,999

t_0 \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4,1	0,924	0,973	0,987	0,993	0,995	0,997	0,998	0,998	0,999	0,999
4,2	0,926	0,974	0,988	0,993	0,996	0,997	0,998	0,998	0,999	0,999
4,3	0,927	0,975	0,988	0,994	0,996	0,997	0,998	0,999	0,999	0,999
4,4	0,929	0,976	0,989	0,994	0,996	0,998	0,998	0,999	0,999	0,999
4,5	0,930	0,977	0,990	0,995	0,997	0,998	0,999	0,999	0,999	0,999
4,6	0,932	0,978	0,990	0,995	0,997	0,998	0,999	0,999	0,999	0,999
4,7	0,933	0,979	0,991	0,995	0,997	0,998	0,999	0,999	0,999	1,000
4.8	0.935	0.980	0.991	0.996	0.998	0.998	0.999	0.999	0.999	
4,9	0,936	0,980	0,992	0,996	0,998	0,999	0,999	0,999	1,000	
5,0	0,937	0,981	0,992	0,996	0,998	0,999	0,999	0,999		
5,1	0,938	0,982	0,993	0,996	0,998	0,999	0,999	0,999		
5,2	0,939	0,982	0,993	0,997	0,998	0,999	0,999	1,000		
5,3	0,941	0,983	0,993	0,997	0,998	0,999	0,999			
5,4	0,942	0,984	0,994	0,997	0,998	0,999	0,999			
5,5	0,943	0,984	0,994	0,997	0,999	0,999	0,999			
5.6	0.944	0.985	0.994	0.997	0.999	0.999	1,000			
5,7	0,945	0,985	0,995	0,998	0,999	0,999				
5,8	0,946	0,986	0,995	0,998	0,999	0,999				
5,9	0,947	0,986	0,995	0,998	0,999	0,999				
6,0	0,947	0,987	0,995	0,998	0,999	0,999				

t_0 \ n	11	12	13	14	15	16	17	18	18	20
0	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500
0,1	0,539	0,539	0,539	0,539	0,539	0,539	0,539	0,539	0,539	0,539
0,2	0,577	0,578	0,578	0,578	0,578	0,578	0,578	0,578	0,578	0,578
0,3	0,615	0,615	0,615	0,616	0,616	0,616	0,616	0,616	0,616	0,616
0,4	0,652	0,652	0,652	0,653	0,653	0,653	0,653	0,653	0,653	0,653
0,5	0,686	0,686	0,687	0,688	0,688	0,688	0,688	0,688	0,689	0,689
0,6	0,720	0,720	0,721	0,721	0,721	0,721	0,722	0,722	0,722	0,722
0,7	0,751	0,751	0,752	0,752	0,753	0,753	0,753	0,754	0,754	0,754
0,8	0,780	0,780	0,781	0,781	0,782	0,782	0,783	0,783	0,783	0,783
0,9	0,806	0,807	0,808	0,808	0,809	0,809	0,810	0,810	0,811	0,811
1,0	0,831	0,831	0,832	0,833	0,833	0,834	0,834	0,835	0,835	0,835
1,1	0,853	0,853	0,854	0,855	0,856	0,856	0,857	0,857	0,857	0,858
1,2	0,872	0,873	0,874	0,875	0,876	0,876	0,877	0,877	0,877	0,878
1,3	0,890	0,891	0,892	0,893	0,893	0,894	0,894	0,895	0,895	0,896
1,4	0,905	0,907	0,907	0,908	0,909	0,910	0,910	0,911	0,911	0,912
1,5	0,919	0,920	0,921	0,922	0,923	0,923	0,924	0,924	0,925	0,925
1,6	0,931	0,932	0,933	0,934	0,935	0,935	0,936	0,936	0,937	0,937
1,7	0,941	0,943	0,943	0,944	0,945	0,946	0,946	0,947	0,947	0,948
1,8	0,950	0,951	0,952	0,953	0,954	0,955	0,955	0,956	0,956	0,956
1,9	0,958	0,959	0,960	0,961	0,962	0,962	0,963	0,963	0,964	0,9964
2,0	0,965	0,966	0,967	0,967	0,968	0,969	0,969	0,970	0,970	0,970

t_0 \ n	11	12	13	14	15	16	17	18	18	20
2,1	0,970	0,971	0,972	0,973	0,973	0,974	0,974	0,975	0,975	0,976
2,2	0,975	0,976	0,977	0,977	0,978	0,979	0,979	0,979	0,980	0,980
2,3	0,979	0,980	0,981	0,981	0,982	0,982	0,983	0,983	0,983	0,984
2,4	0,982	0,983	0,984	0,985	0,985	0,985	0,986	0,986	0,987	0,987
2,5	0,985	0,986	0,987	0,987	0,988	0,988	0,988	0,989	0,989	0,989
2,6	0,988	0,988	0,989	0,989	0,990	0,990	0,991	0,991	0,991	0,991
2,7	0,990	0,990	0,991	0,991	0,992	0,992	0,992	0,993	0,993	0,993
2,8	0,991	0,992	0,992	0,993	0,993	0,994	0,994	0,994	0,994	0,994
2,9	0,993	0,993	0,994	0,994	0,994	0,994	0,995	0,995	0,995	0,996
3,0	0,994	0,994	0,995	0,995	0,995	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996
3,1	0,995	0,995	0,996	0,996	0,996	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997
3,2	0,996	0,996	0,996	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,998	0,998
3,3	0,996	0,997	0,997	0,997	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998
3,4	0,997	0,997	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,999
3,5	0,997	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,999	0,999	0,999	0,999
3,6	0,998	0,998	0,998	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999
3,7	0,998	0,998	0,989	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999
3,8	0,998	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999
3,9	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	1,000
4,0	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	1,000	1,000	
4.1	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	1,000	1,000			
4.2	0,999	0,999	0,999	1,000	1,000					
4.3	0,999	0,999	1,000							
4,4	0,999	1,000								
4.5	0,999									
4,6	1,000									

Tabela 28. Kritične vrednosti Studentovog t rasporeda

ν α	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005
1	3,078	6,3138	2,706	31,821	63,657
2	1,886	2,9200	4,3027	6,965	9,9248
3	1,638	2,3534	3,1825	4,541	5,8409
4	1,533	2,1318	2,7764	3,747	4,6041
5	1,476	2,0150	2,5706	3,365	4,0321
6	1,440	1,9432	2,4469	3,143	3,7074
7	1,415	1,8946	2,3646	2,998	3,4995
8	1,397	1,8595	2,3060	2,896	3,3554
9	1,383	1,8331	2,2622	2,821	3,2498
10	1,372	1,8125	2,2281	2,764	3,1693
11	1,363	1,7959	2,2010	2,718	3,1058
12	1,356	1,7823	2,1788	2,681	3,0545
13	1,350	1,7709	2,1604	2,650	3,0123
14	1,345	1,7613	2,1448	2,624	2,9768
15	1,341	1,7531	2,1315	2,602	2,9467
16	1,337	1,7459	2,1199	2,583	2,9208
17	1,333	1,7396	2,1098	2,567	2,8982
18	1,330	1,7341	2,1009	2,552	2,8784
19	1,328	1,7291	2,0930	2,539	2,8609
20	1,325	1,7247	2,0860	2,528	2,8453
21	1,323	1,7207	2,0796	2,518	2,8314
22	1,321	1,7171	2,0739	2,508	2,8188
23	1,319	1,7139	2,0687	2,500	2,8073
24	1,318	1,7109	2,0639	2,492	2,7969
25	1,316	1,7081	2,0595	2,485	2,7874
26	1,315	1,7056	2,0555	2,479	2,7787
27	1,314	1,7033	2,0518	2,473	2,7707
28	1,313	1,7011	2,0484	2,467	2,7633
29	1,311	1,6991	2,0452	2,462	2,7564
30	1,310	1,6973	2,0423	2,457	2,7500
140	1,288	1,6558	1,9771	2,353	2,6114
160	1,287	1,6545	1,9749	2,350	2,6070
180	1,286	1,6534	1,9733	2,347	2,6035
200	1,286	1,6525	1,9719	2,345	2,6006
∞	1,282	1,6450	1,96	2,326	2,576

Tabela 29. Fišerov raspored

α	n_2	n_1										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,95	1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243
0,99		4052	4999	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6022	6056	6082
0,95	2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,40
0,99		98,50	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,34	99,36	99,38	99,40	99,41
0,95	3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76
0,99		34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13
0,95	4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93
0,99		21,20	18,00	16,70	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,54	14,45
0,95	5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70
0,99		16,26	13,27	12,06	11,40	10,97	10,67	10,45	10,27	10,15	10,05	9,96
0,95	6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03
0,99		13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79
0,95	7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60
0,99		12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7,00	6,84	6,71	6,62	6,54
0,95	8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31
0,99		11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91	5,82	5,74
0,95	9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10
0,99		10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	5,18
0,95	10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94
0,99		10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,21	5,06	4,95	4,85	4,78
0,95	11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82
0,99		9,65	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,74	6,63	4,54	4,46
0,95	12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72
0,99		9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,22
0,95	13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,63
0,99		9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02
0,95	14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56
0,99		8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86
0,95	15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,51
0,99		8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73
0,95	16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,45
0,99		8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,61

Tabela 30. Binomni raspored verovatnoće

		p									
n	x	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
1	0	0,9500000	0,9000000	0,8500000	0,8000000	0,7500000	0,7000000	0,6500000	0,6000000	0,5500000	0,5000000
	1	0,0500000	0,1000000	0,1500000	0,2000000	0,2500000	0,3000000	0,3500000	0,4000000	0,4500000	0,5000000
2	0	0,9025000	0,8100000	0,7225000	0,6400000	0,5625000	0,4900000	0,4225000	0,3600000	0,3025000	0,2500000
	1	0,0950000	0,1800000	0,2550000	0,3200000	0,3750000	0,4200000	0,4550000	0,4800000	0,4950000	0,5000000
	2	0,0025000	0,0100000	0,0225000	0,0400000	0,0625000	0,0900000	0,1225000	0,1600000	0,2025000	0,2500000
3	0	0,8573750	0,7290000	0,6141250	0,5120000	0,4218750	0,3430000	0,2746250	0,2160000	0,1663750	0,1250000
	1	0,1353750	0,2430000	0,3251250	0,3840000	0,4218750	0,4410000	0,4436250	0,4320000	0,4083750	0,3750000
	2	0,0071250	0,0270000	0,0573750	0,0960000	0,1406250	0,1890000	0,2388750	0,2880000	0,3341250	0,3750000
	3	0,0001250	0,0010000	0,0033750	0,0080000	0,0156250	0,0270000	0,0428750	0,0640000	0,0911250	0,1250000
4	0	0,8145063	0,6561000	0,5220063	0,4096000	0,3164063	0,2401000	0,1785063	0,1296000	0,0915063	0,0625000
	1	0,1714750	0,2916000	0,3684750	0,4096000	0,4218750	0,4116000	0,3844750	0,3456000	0,2994750	0,2500000
	2	0,0135375	0,0486000	0,0975375	0,1536000	0,2109375	0,2646000	0,3105375	0,3456000	0,3675375	0,3750000
	3	0,0004750	0,0036000	0,0114750	0,0256000	0,0468750	0,0756000	0,1114750	0,1536000	0,2004750	0,2500000
	4	0,0000063	0,0001000	0,0005063	0,0016000	0,0039063	0,0081000	0,0150063	0,0256000	0,0410063	0,0625000
5	0	0,7737809	0,5904900	0,4437053	0,3276800	0,2373047	0,1680700	0,1160291	0,0777600	0,0503284	0,0312500
	1	0,2036266	0,3280500	0,3915047	0,4096000	0,3955078	0,3601500	0,3123859	0,2592000	0,2058891	0,1562500
	2	0,0214344	0,0729000	0,1381781	0,2048000	0,2636719	0,3087000	0,3364156	0,3456000	0,3369094	0,3125000
	3	0,0011281	0,0081000	0,0243844	0,0512000	0,0878906	0,1323000	0,1811469	0,2304000	0,2756531	0,3125000
	4	0,0000297	0,0004500	0,0021516	0,0064000	0,0146484	0,0283500	0,0487703	0,0768000	0,1127672	0,1562500
	5	0,0000003	0,0000100	0,0000759	0,0003200	0,0009766	0,0024300	0,0052522	0,0102400	0,0184528	0,0312500
6	0	0,7350919	0,5314410	0,3771495	0,2621440	0,1779785	0,1176490	0,0754189	0,0466560	0,0276806	0,0156250
	1	0,2321343	0,3542940	0,3993348	0,3932160	0,3559570	0,3025260	0,2436610	0,1866240	0,1358868	0,0937500
	2	0,0305440	0,0984150	0,1761771	0,2457600	0,2966309	0,3241350	0,3280052	0,3110400	0,2779502	0,2343750
	3	0,0021434	0,0145800	0,0414534	0,0819200	0,1318359	0,1852200	0,2354909	0,2764800	0,3032184	0,3125000
	4	0,0000846	0,0012150	0,0054865	0,0153600	0,0329590	0,0595350	0,0951021	0,1382400	0,1860659	0,2343750
	5	0,0000018	0,0000540	0,0003873	0,0015360	0,0043945	0,0102060	0,0204835	0,0368640	0,0608943	0,0937500
	6	0,0000000	0,0000010	0,0000114	0,0000640	0,0002441	0,0007290	0,0018383	0,0040960	0,0083038	0,0156250
7	0	0,6983373	0,4782969	0,3205771	0,2097152	0,1334839	0,0823543	0,0490223	0,0279936	0,0152244	0,0078125
	1	0,2572822	0,3720087	0,3960070	0,3670016	0,3114624	0,2470629	0,1847763	0,1306368	0,0871940	0,0546875
	2	0,0406235	0,1240029	0,2096508	0,2752512	0,3114624	0,3176523	0,2984848	0,2612736	0,2140217	0,1640625
	3	0,0035635	0,0229635	0,0616620	0,1146880	0,1730347	0,2268945	0,2678709	0,2903040	0,2918477	0,2734375
	4	0,0001876	0,0025515	0,0108815	0,0286720	0,0576782	0,0972405	0,1442382	0,1935360	0,2387845	0,2734375
	5	0,0000059	0,0001701	0,0011522	0,0043008	0,0115356	0,0250047	0,0466000	0,0774144	0,1172215	0,1640625
	6	0,0000001	0,0000063	0,0000678	0,0003584	0,0012817	0,0035721	0,0083641	0,0172032	0,0319695	0,0546875
	7	0,0000000	0,0000001	0,0000017	0,0000128	0,0000610	0,0002187	0,0006434	0,0016384	0,0037367	0,0078125

8	0	0,6634204	0,4304672	0,2724905	0,1677722	0,1001129	0,0576480	0,0318645	0,0167962	0,0083734	0,0039063
	1	0,2793349	0,3826375	0,3846925	0,3355443	0,2669678	0,1976503	0,1372624	0,0895795	0,0548077	0,0312500
	2	0,0514564	0,1488035	0,2376042	0,2936013	0,3114624	0,2964755	0,2586868	0,2090189	0,1569492	0,1093750
	3	0,0054165	0,0330674	0,0838603	0,1468006	0,2076416	0,2541218	0,2785858	0,2786918	0,2568260	0,2187500
	4	0,0003563	0,0045927	0,0184986	0,0458752	0,0865173	0,1361367	0,1875097	0,2322432	0,2626630	0,2734375
	5	0,0000150	0,0004082	0,0026116	0,0091750	0,0230713	0,0466754	0,0807734	0,1238630	0,1719249	0,2187500
	6	0,0000004	0,0000227	0,0002304	0,0011469	0,0038452	0,0100019	0,0217467	0,0412877	0,0703329	0,1093750
	7	0,0000000	0,0000007	0,0000116	0,0000819	0,0003662	0,0012247	0,0033456	0,0078643	0,0164415	0,0312500
	8	0,0000000	0,0000000	0,0000003	0,0000026	0,0000153	0,0000656	0,0002252	0,0006554	0,0016815	0,0039063
9	0	0,6302494	0,3874205	0,2316169	0,1342177	0,0750847	0,0403536	0,0207119	0,0100777	0,0046054	0,0019531
	1	0,2985392	0,3874205	0,3678622	0,3019899	0,2252541	0,1556496	0,1003731	0,0604662	0,0339122	0,0175781
	2	0,0628504	0,1721869	0,2596674	0,3019899	0,3003387	0,2668279	0,2161882	0,1612431	0,1109855	0,0703125
	3	0,0077185	0,0446410	0,1069219	0,1761608	0,2335968	0,2668279	0,2716211	0,2508227	0,2118815	0,1640625
	4	0,0006094	0,0074402	0,0283029	0,0660603	0,1167984	0,1715322	0,2193863	0,2508227	0,2600363	0,2460938
	5	0,0000321	0,0008267	0,0049946	0,0165151	0,0389328	0,0735138	0,1181311	0,1672151	0,2127570	0,2460938
	6	0,0000011	0,0000612	0,0005876	0,0027525	0,0086517	0,0210039	0,0424060	0,0743178	0,1160493	0,1640625
	7	0,0000000	0,0000029	0,0000444	0,0002949	0,0012360	0,0038579	0,0097860	0,0212337	0,0406926	0,0703125
	8	0,0000000	0,0000001	0,0000020	0,0000184	0,0001030	0,0004133	0,0013173	0,0035389	0,0083235	0,0175781
	9	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000005	0,0000038	0,0000197	0,0000788	0,0002621	0,0007567	0,0019531
10	0	0,5987369	0,3486784	0,1968744	0,1073742	0,0563135	0,0282475	0,0134627	0,0060466	0,0025330	0,0009766
	1	0,3151247	0,3874205	0,3474254	0,2684355	0,1877117	0,1210608	0,0724917	0,0403108	0,0207241	0,0097656
	2	0,0746348	0,1937102	0,2758967	0,3019899	0,2815676	0,2334744	0,1756530	0,1209324	0,0763026	0,0439453
	3	0,0104751	0,0573956	0,1298337	0,2013266	0,2502823	0,2668279	0,2522196	0,2149908	0,1664783	0,1171875
	4	0,0009648	0,0111603	0,0400957	0,0880804	0,1459980	0,2001209	0,2376685	0,2508227	0,2383666	0,2050781
	5	0,0000609	0,0014880	0,0084909	0,0264241	0,0583992	0,1029193	0,1535704	0,2006581	0,2340327	0,2460938
	6	0,0000027	0,0001378	0,0012487	0,0055050	0,0162220	0,0367569	0,0689098	0,1114767	0,1595678	0,2050781
	7	0,0000001	0,0000087	0,0001259	0,0007864	0,0030899	0,0090017	0,0212030	0,0424673	0,0746031	0,1171875
	8	0,0000000	0,0000004	0,0000083	0,0000737	0,0003862	0,0014467	0,0042814	0,0106168	0,0228896	0,0439453
	9	0,0000000	0,0000000	0,0000003	0,0000041	0,0000286	0,0001378	0,0005123	0,0015729	0,0041617	0,0097656
	10	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000001	0,0000010	0,0000059	0,0000276	0,0001049	0,0003405	0,0009766
11	0	0,5688001	0,3138106	0,1673432	0,0858993	0,0422351	0,0197733	0,0087508	0,0036280	0,0013931	0,0004883
	1	0,3293053	0,3835463	0,3248428	0,2362232	0,1548622	0,0932168	0,0518316	0,0266051	0,0125381	0,0053711
	2	0,0866593	0,2130813	0,2866260	0,2952790	0,2581036	0,1997504	0,1395465	0,0886837	0,0512923	0,0268555
	3	0,0136830	0,0710271	0,1517432	0,2214593	0,2581036	0,2568219	0,2254213	0,1773674	0,1258992	0,0805664
	4	0,0014403	0,0157838	0,0535564	0,1107296	0,1720691	0,2201330	0,2427614	0,2364899	0,2060169	0,1611328
	5	0,0001061	0,0024553	0,0132316	0,0387554	0,0802989	0,1320798	0,1830047	0,2207239	0,2359830	0,2255859
	6	0,0000056	0,0002728	0,0023350	0,0096888	0,0267663	0,0566056	0,0985410	0,1471493	0,1930770	0,2255859
	7	0,0000002	0,0000217	0,0002943	0,0017302	0,0063729	0,0173283	0,0379004	0,0700711	0,1128372	0,1611328
	8	0,0000000	0,0000012	0,0000260	0,0002163	0,0010622	0,0037132	0,0102040	0,0233570	0,0461607	0,0805664
	9	0,0000000	0,0000000	0,0000015	0,0000180	0,0001180	0,0005305	0,0018315	0,0051905	0,0125893	0,0268555
	10	0,0000000	0,0000000	0,0000001	0,0000009	0,0000079	0,0000455	0,0001972	0,0006921	0,0020601	0,0053711
	11	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000002	0,0000018	0,0000097	0,0000419	0,0001532	0,0004883
12	0	0,5403601	0,2824295	0,1422418	0,0687195	0,0316764	0,0138413	0,0056880	0,0021768	0,0007662	0,0002441
	1	0,3412801	0,3765727	0,3012178	0,2061584	0,1267054	0,0711838	0,0367533	0,0174143	0,0075229	0,0029297
	2	0,0987916	0,2301278	0,2923585	0,2834678	0,2322932	0,1677903	0,1088463	0,0638523	0,0338529	0,0161133
	3	0,0173319	0,0852325	0,1719756	0,2362232	0,2581036	0,2397004	0,1953651	0,1418940	0,0923261	0,0537109
	4	0,0020525	0,0213081	0,0682844	0,1328756	0,1935777	0,2311397	0,2366924	0,2128409	0,1699639	0,1208496
	5	0,0001728	0,0037881	0,0192803	0,0531502	0,1032414	0,1584958	0,2039196	0,2270303	0,2224982	0,1933594
	6	0,0000106	0,0004911	0,0039695	0,0155021	0,0401495	0,0792479	0,1281033	0,1765791	0,2123847	0,2255859
	7	0,0000005	0,0000468	0,0006004	0,0033219	0,0114713	0,0291115	0,0591246	0,1009024	0,1489451	0,1933594
	8	0,0000000	0,0000032	0,0000662	0,0005190	0,0023898	0,0077977	0,0198977	0,0420427	0,0761651	0,1208496

	9	0,0000000	0,0000002	0,0000052	0,0000577	0,0003541	0,0014853	0,0047618	0,0124571	0,0276964	0,0537109
	10	0,0000000	0,0000000	0,0000003	0,0000043	0,0000354	0,0001910	0,0007692	0,0024914	0,0067982	0,0161133
	11	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000002	0,0000021	0,0000149	0,0000753	0,0003020	0,0010113	0,0029297
	12	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000001	0,0000005	0,0000034	0,0000168	0,0000690	0,0002441
13	0	0,5133421	0,2541866	0,1209055	0,0549756	0,0237573	0,0096889	0,0036972	0,0013061	0,0004214	0,0001221
	1	0,3512341	0,3671584	0,2773714	0,1786706	0,1029481	0,0539810	0,0258804	0,0113193	0,0044824	0,0015869
	2	0,1109160	0,2447723	0,2936874	0,2680060	0,2058963	0,1388083	0,0836137	0,0452771	0,0220044	0,0095215
	3	0,0214048	0,0997220	0,1900330	0,2456721	0,2516510	0,2181274	0,1650835	0,1106773	0,0660132	0,0349121
	4	0,0028164	0,0277006	0,0838381	0,1535451	0,2097092	0,2337079	0,2222278	0,1844621	0,1350269	0,0872803
	5	0,0002668	0,0055401	0,0266309	0,0690953	0,1258255	0,1802890	0,2153900	0,2213546	0,1988578	0,1571045
	6	0,0000187	0,0008208	0,0062661	0,0230318	0,0559224	0,1030223	0,1546390	0,1967596	0,2169358	0,2094727
	7	0,0000010	0,0000912	0,0011058	0,0057579	0,0186408	0,0441524	0,0832672	0,1311731	0,1774929	0,2094727
	8	0,0000000	0,0000076	0,0001464	0,0010796	0,0046602	0,0141918	0,0336271	0,0655865	0,1089161	0,1571045
	9	0,0000000	0,0000005	0,0000143	0,0001499	0,0008630	0,0033790	0,0100594	0,0242913	0,0495073	0,0872803
	10	0,0000000	0,0000000	0,0000010	0,0000150	0,0001151	0,0005793	0,0021666	0,0064777	0,0162024	0,0349121
	11	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000010	0,0000105	0,0000677	0,0003182	0,0011778	0,0036154	0,0095215
	12	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000006	0,0000048	0,0000286	0,0001309	0,0004930	0,0015869
	13	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000002	0,0000012	0,0000067	0,0000310	0,0001221

14	0	0,4876750	0,2287679	0,1027697	0,0439805	0,0178179	0,0067822	0,0024032	0,0007836	0,0002318	0,0000610
	1	0,3593395	0,3558612	0,2539015	0,1539316	0,0831504	0,0406934	0,0181163	0,0073140	0,0026549	0,0008545
	2	0,1229319	0,2570109	0,2912400	0,2501389	0,1801593	0,1133601	0,0634071	0,0316940	0,0141195	0,0055542
	3	0,0258804	0,1142271	0,2055812	0,2501389	0,2402123	0,1943317	0,1365691	0,0845172	0,0462092	0,0222168
	4	0,0037458	0,0349027	0,0997673	0,1719705	0,2201946	0,2290338	0,2022273	0,1549482	0,1039707	0,0610962
	5	0,0003943	0,0077562	0,0352120	0,0859852	0,1467964	0,1963146	0,2177833	0,2065976	0,1701339	0,1221924
	6	0,0000311	0,0012927	0,0093208	0,0322445	0,0733982	0,1262023	0,1759019	0,2065976	0,2088007	0,1832886
	7	0,0000019	0,0001642	0,0018798	0,0092127	0,0279612	0,0618134	0,1082473	0,1574077	0,1952422	0,2094727
	8	0,0000001	0,0000160	0,0002903	0,0020153	0,0081554	0,0231800	0,0510011	0,0918212	0,1397757	0,1832886
	9	0,0000000	0,0000012	0,0000341	0,0003359	0,0018123	0,0066229	0,0183081	0,0408094	0,0762413	0,1221924
	10	0,0000000	0,0000001	0,0000030	0,0000420	0,0003021	0,0014192	0,0049291	0,0136031	0,0311896	0,0610962
	11	0,0000000	0,0000000	0,0000002	0,0000038	0,0000366	0,0002212	0,0009651	0,0032977	0,0092796	0,0222168
	12	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000002	0,0000031	0,0000237	0,0001299	0,0005496	0,0018981	0,0055542
	13	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000002	0,0000016	0,0000108	0,0000564	0,0002389	0,0008545
	14	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000004	0,0000027	0,0000140	0,0000610

15	0	0,4632912	0,2058911	0,0873542	0,0351844	0,0133635	0,0047476	0,0015621	0,0004702	0,0001275	0,0000305
	1	0,3657562	0,3431519	0,2312318	0,1319414	0,0668173	0,0305200	0,0126167	0,0047018	0,0015645	0,0004578
	2	0,1347523	0,2668959	0,2856392	0,2308974	0,1559070	0,0915601	0,0475553	0,0219420	0,0089604	0,0032043
	3	0,0307330	0,1285054	0,2184300	0,2501389	0,2251991	0,1700402	0,1109624	0,0633879	0,0317688	0,0138855
	4	0,0048526	0,0428351	0,1156394	0,1876042	0,2251991	0,2186231	0,1792469	0,1267758	0,0779780	0,0416565
	5	0,0005619	0,0104708	0,0448953	0,1031823	0,1651460	0,2061304	0,2123387	0,1859378	0,1403605	0,0916443
	6	0,0000493	0,0019390	0,0132045	0,0429926	0,0917478	0,1472360	0,1905604	0,2065976	0,1914006	0,1527405
	7	0,0000033	0,0002770	0,0029960	0,0138191	0,0393205	0,0811300	0,1319264	0,1770837	0,2013435	0,1963806
	8	0,0000002	0,0000308	0,0005287	0,0034548	0,0131068	0,0347700	0,0710373	0,1180558	0,1647356	0,1963806
	9	0,0000000	0,0000027	0,0000726	0,0006718	0,0033981	0,0115900	0,0297507	0,0612141	0,1048318	0,1527405
	10	0,0000000	0,0000002	0,0000077	0,0001008	0,0006796	0,0029803	0,0096118	0,0244856	0,0514629	0,0916443
	11	0,0000000	0,0000000	0,0000006	0,0000115	0,0001030	0,0005806	0,0023525	0,0074199	0,0191391	0,0416565
	12	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000010	0,0000114	0,0000829	0,0004222	0,0016489	0,0052197	0,0138855
	13	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000001	0,0000009	0,0000082	0,0000525	0,0002537	0,0009855	0,0032043
	14	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000005	0,0000040	0,0000242	0,0001152	0,0004578
	15	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000001	0,0000011	0,0000063	0,0000305

16	0	0,4401267	0,1853020	0,0742511	0,0281475	0,0100226	0,0033233	0,0010153	0,0002821	0,0000701	0,0000153
	1	0,3706330	0,3294258	0,2096501	0,1125900	0,0534538	0,0227883	0,0087476	0,0030092	0,0009179	0,0002441
	2	0,1463025	0,2745215	0,2774781	0,2111062	0,1336346	0,0732481	0,0353268	0,0150459	0,0056323	0,0018311
	3	0,0359339	0,1423445	0,2285114	0,2462906	0,2078761	0,1464962	0,0887699	0,0468095	0,0215051	0,0085449
	4	0,0061466	0,0514022	0,1310580	0,2001111	0,2251991	0,2040483	0,1553473	0,1014206	0,0571839	0,0277710
	5	0,0007764	0,0137072	0,0555069	0,1200667	0,1801593	0,2098782	0,2007566	0,1622730	0,1122884	0,0666504
	6	0,0000749	0,0027922	0,0179581	0,0550306	0,1100973	0,1649043	0,1981828	0,1983337	0,1684326	0,1221924
	7	0,0000056	0,0004432	0,0045273	0,0196538	0,0524273	0,1009618	0,1524483	0,1888892	0,1968692	0,1745605
	8	0,0000003	0,0000554	0,0008988	0,0055276	0,0196602	0,0486780	0,0923485	0,1416669	0,1812092	0,1963806
	9	0,0000000	0,0000055	0,0001410	0,0012284	0,0058253	0,0185440	0,0442010	0,0839508	0,1317885	0,1745605
	10	0,0000000	0,0000004	0,0000174	0,0002150	0,0013592	0,0055632	0,0166604	0,0391770	0,0754789	0,1221924
	11	0,0000000	0,0000000	0,0000017	0,0000293	0,0002471	0,0013005	0,0048933	0,0142462	0,0336848	0,0666504
	12	0,0000000	0,0000000	0,0000001	0,0000031	0,0000343	0,0002322	0,0010978	0,0039573	0,0114834	0,0277710
	13	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000002	0,0000035	0,0000306	0,0001819	0,0008117	0,0028909	0,0085449
	14	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000003	0,0000028	0,0000210	0,0001160	0,0005069	0,0018311
	15	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000002	0,0000015	0,0000103	0,0000553	0,0002441
	16	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000001	0,0000004	0,0000028	0,0000153
17	0	0,4181203	0,1667718	0,0631134	0,0225180	0,0075169	0,0023263	0,0006600	0,0001693	0,0000386	0,0000076
	1	0,3741077	0,3150134	0,1893403	0,0957015	0,0425960	0,0169488	0,0060413	0,0019184	0,0005364	0,0001297
	2	0,1575190	0,2800119	0,2673039	0,1914030	0,1135894	0,0581102	0,0260241	0,0102312	0,0035108	0,0010376
	3	0,0414524	0,1555622	0,2358564	0,2392537	0,1893157	0,1245218	0,0700648	0,0341041	0,0143623	0,0051880
	4	0,0076360	0,0604964	0,1456760	0,2093470	0,2208683	0,1867826	0,1320452	0,0795762	0,0411284	0,0181580
	5	0,0010449	0,0174767	0,0668396	0,1360756	0,1914192	0,2081292	0,1848633	0,1379321	0,0874914	0,0472107
	6	0,0001100	0,0038837	0,0235904	0,0680378	0,1276128	0,1783965	0,1990836	0,1839094	0,1431677	0,0944214
	7	0,0000091	0,0006781	0,0065419	0,0267291	0,0668448	0,1201446	0,1684554	0,1926670	0,1840727	0,1483765
	8	0,0000006	0,0000942	0,0014431	0,0083529	0,0278520	0,0643632	0,1133834	0,1605559	0,1882562	0,1854706
	9	0,0000000	0,0000105	0,0002547	0,0020882	0,0092840	0,0275842	0,0610526	0,1070372	0,1540278	0,1854706
	10	0,0000000	0,0000009	0,0000360	0,0004176	0,0024757	0,0094574	0,0262996	0,0570865	0,1008182	0,1483765
	11	0,0000000	0,0000001	0,0000040	0,0000664	0,0005252	0,0025793	0,0090117	0,0242185	0,0524921	0,0944214
	12	0,0000000	0,0000000	0,0000004	0,0000083	0,0000875	0,0005527	0,0024262	0,0080728	0,0214740	0,0472107
	13	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000008	0,0000112	0,0000911	0,0005025	0,0020700	0,0067576	0,0181580
	14	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000001	0,0000011	0,0000112	0,0000773	0,0003943	0,0015797	0,0051880
	15	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000001	0,0000010	0,0000083	0,0000526	0,0002585	0,0010376
	16	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000001	0,0000006	0,0000044	0,0000264	0,0001297
	17	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000002	0,0000013	0,0000076
18	0	0,3972143	0,1500946	0,0536464	0,0180144	0,0056377	0,0016284	0,0004290	0,0001016	0,0000212	0,0000038
	1	0,3763083	0,3001893	0,1704062	0,0810648	0,0338263	0,0125620	0,0041578	0,0012187	0,0003124	0,0000687
	2	0,1683485	0,2835121	0,2556094	0,1722627	0,0958411	0,0457617	0,0190301	0,0069061	0,0021723	0,0005836
	3	0,0472557	0,1680072	0,2405735	0,2296836	0,1703841	0,1045983	0,0546506	0,0245549	0,0094791	0,0031128
	4	0,0093268	0,0700030	0,1592031	0,2153284	0,2129802	0,1681044	0,1103521	0,0613874	0,0290837	0,0116730
	5	0,0013745	0,0217787	0,0786650	0,1507299	0,1987815	0,2017252	0,1663770	0,1145897	0,0666280	0,0326843
	6	0,0001567	0,0052430	0,0300778	0,0816453	0,1435644	0,1873163	0,1941065	0,1655185	0,1181133	0,0708160
	7	0,0000141	0,0009987	0,0090992	0,0349909	0,0820368	0,1376201	0,1791752	0,1891640	0,1656655	0,1213989
	8	0,0000010	0,0001526	0,0022079	0,0120281	0,0376002	0,0810976	0,1326586	0,1734003	0,1863736	0,1669235
	9	0,0000001	0,0000188	0,0004329	0,0033411	0,0139260	0,0386179	0,0793684	0,1284447	0,1694306	0,1854706
	10	0,0000000	0,0000019	0,0000688	0,0007518	0,0041778	0,0148955	0,0384631	0,0770668	0,1247625	0,1669235
	11	0,0000000	0,0000002	0,0000088	0,0001367	0,0010128	0,0046427	0,0150625	0,0373657	0,0742389	0,1213989
	12	0,0000000	0,0000000	0,0000009	0,0000199	0,0001969	0,0011607	0,0047312	0,0145311	0,0354322	0,0708160
	13	0,0000000	0,0000000	0,0000001	0,0000023	0,0000303	0,0002296	0,0011758	0,0044711	0,0133800	0,0326843
	14	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000002	0,0000036	0,0000351	0,0002261	0,0010646	0,0039097	0,0116730
	15	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000003	0,0000040	0,0000325	0,0001893	0,0008530	0,0031128
	16	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000003	0,0000033	0,0000237	0,0001309	0,0005836
	17	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000002	0,0000019	0,0000126	0,0000687
	18	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000001	0,0000006	0,0000038

19	0	0,3773536	0,1350852	0,0455994	0,0144115	0,0042283	0,0011399	0,0002788	0,0000609	0,0000117	0,0000019
	1	0,3773536	0,2851798	0,1528923	0,0684547	0,0267791	0,0092820	0,0028527	0,0007719	0,0001813	0,0000362
	2	0,1787464	0,2851798	0,2428289	0,1540231	0,0803374	0,0358018	0,0138248	0,0046311	0,0013353	0,0003262
	3	0,0533103	0,1795577	0,2428289	0,2181994	0,1517484	0,0869473	0,0421834	0,0174954	0,0061911	0,0018482
	4	0,0112232	0,0798034	0,1714086	0,2181994	0,2023312	0,1490525	0,0908566	0,0466544	0,0202616	0,0073929
	5	0,0017721	0,0266011	0,0907457	0,1636496	0,2023312	0,1916390	0,1467683	0,0933088	0,0497331	0,0221786
	6	0,0002176	0,0068966	0,0373659	0,0954622	0,1573687	0,1916390	0,1844012	0,1451470	0,0949449	0,0517502
	7	0,0000213	0,0014231	0,0122460	0,0443218	0,0974187	0,1525290	0,1844012	0,1797058	0,1442670	0,0961075
	8	0,0000017	0,0002372	0,0032416	0,0166207	0,0487094	0,0980543	0,1489394	0,1797058	0,1770550	0,1441612
	9	0,0000001	0,0000322	0,0006992	0,0050785	0,0198446	0,0513618	0,0980200	0,1464269	0,1770550	0,1761971
	10	0,0000000	0,0000036	0,0001234	0,0012696	0,0066149	0,0220122	0,0527800	0,0976180	0,1448631	0,1761971
	11	0,0000000	0,0000003	0,0000178	0,0002597	0,0018041	0,0077186	0,0232527	0,0532462	0,0969745	0,1441612
	12	0,0000000	0,0000000	0,0000021	0,0000433	0,0004009	0,0022053	0,0083471	0,0236650	0,0528952	0,0961075
	13	0,0000000	0,0000000	0,0000002	0,0000058	0,0000720	0,0005089	0,0024202	0,0084951	0,0233035	0,0517502
	14	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000006	0,0000103	0,0000935	0,0005585	0,0024272	0,0081713	0,0221786
	15	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000001	0,0000011	0,0000134	0,0001002	0,0005394	0,0022285	0,0073929
	16	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000001	0,0000014	0,0000135	0,0000899	0,0004558	0,0018482
	17	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000001	0,0000013	0,0000106	0,0000658	0,0003262
	18	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000001	0,0000008	0,0000060	0,0000362
	19	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000003	0,0000019
20	0	0,3584859	0,1215767	0,0387595	0,0115292	0,0031712	0,0007979	0,0001812	0,0000366	0,0000064	0,0000010
	1	0,3773536	0,2701703	0,1367983	0,0576461	0,0211414	0,0068393	0,0019519	0,0004875	0,0001050	0,0000191
	2	0,1886768	0,2851798	0,2293384	0,1369094	0,0669478	0,0278459	0,0099846	0,0030874	0,0008160	0,0001812
	3	0,0595821	0,1901199	0,2428289	0,2053641	0,1338956	0,0716037	0,0322579	0,0123497	0,0040060	0,0010872
	4	0,0133276	0,0897788	0,1821217	0,2181994	0,1896855	0,1304210	0,0738210	0,0349908	0,0139299	0,0046206
	5	0,0022446	0,0319214	0,1028452	0,1745595	0,2023312	0,1788631	0,1271992	0,0746470	0,0364709	0,0147858
	6	0,0002953	0,0088670	0,0453729	0,1090997	0,1686093	0,1916390	0,1712297	0,1244117	0,0745996	0,0369644
	7	0,0000311	0,0019705	0,0160140	0,0545499	0,1124062	0,1642620	0,1844012	0,1658823	0,1220721	0,0739288
	8	0,0000027	0,0003558	0,0045922	0,0221609	0,0608867	0,1143967	0,1613510	0,1797058	0,1623004	0,1201344
	9	0,0000002	0,0000527	0,0010805	0,0073870	0,0270608	0,0653696	0,1158418	0,1597385	0,1770550	0,1601791
	10	0,0000000	0,0000064	0,0002097	0,0020314	0,0099223	0,0308171	0,0686140	0,1171416	0,1593495	0,1761971
	11	0,0000000	0,0000007	0,0000336	0,0004617	0,0030068	0,0120067	0,0335873	0,0709949	0,1185244	0,1601791
	12	0,0000000	0,0000001	0,0000045	0,0000866	0,0007517	0,0038593	0,0135641	0,0354974	0,0727309	0,1201344
	13	0,0000000	0,0000000	0,0000005	0,0000133	0,0001542	0,0010178	0,0044946	0,0145631	0,0366197	0,0739288
	14	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000017	0,0000257	0,0002181	0,0012101	0,0048544	0,0149808	0,0369644
	15	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000002	0,0000034	0,0000374	0,0002606	0,0012945	0,0049028	0,0147858
	16	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000004	0,0000050	0,0000439	0,0002697	0,0012536	0,0046206
	17	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000005	0,0000056	0,0000423	0,0002413	0,0010872
	18	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000005	0,0000047	0,0000329	0,0001812
	19	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000003	0,0000028	0,0000191
	20	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000001	0,0000010
21	0	0,3405616	0,1094190	0,0329456	0,0092234	0,0023784	0,0005585	0,0001178	0,0000219	0,0000035	0,0000005
	1	0,3764102	0,2553110	0,1220925	0,0484227	0,0166489	0,0050269	0,0013322	0,0003071	0,0000606	0,0000100
	2	0,1981106	0,2836789	0,2154574	0,1210568	0,0554962	0,0215439	0,0071731	0,0020474	0,0004961	0,0001001
	3	0,0660369	0,1996259	0,2408053	0,1916732	0,1171587	0,0584763	0,0244622	0,0086448	0,0025705	0,0006342
	4	0,0156403	0,0998129	0,1912278	0,2156324	0,1757380	0,1127758	0,0592739	0,0259344	0,0094641	0,0028539
	5	0,0027988	0,0377071	0,1147367	0,1832875	0,1991697	0,1643304	0,1085168	0,0587845	0,0263274	0,0097032
	6	0,0003928	0,0111725	0,0539937	0,1221917	0,1770398	0,1878062	0,1558190	0,1045058	0,0574417	0,0258751
	7	0,0000443	0,0026601	0,0204178	0,0654598	0,1264570	0,1724751	0,1797912	0,1492940	0,1007095	0,0554466
	8	0,0000041	0,0005172	0,0063055	0,0286387	0,0737666	0,1293563	0,1694186	0,1741764	0,1441976	0,0970316
	9	0,0000003	0,0000830	0,0016073	0,0103417	0,0355172	0,0800777	0,1317700	0,1677254	0,1704154	0,1401567
	10	0,0000000	0,0000111	0,0003404	0,0031025	0,0142069	0,0411828	0,0851437	0,1341803	0,1673169	0,1681881
	11	0,0000000	0,0000012	0,0000601	0,0007756	0,0047356	0,0176498	0,0458466	0,0894535	0,1368957	0,1681881
	12	0,0000000	0,0000001	0,0000088	0,0001616	0,0013155	0,0063035	0,0205722	0,0496964	0,0933380	0,1401567
	13	0,0000000	0,0000000	0,0000011	0,0000280	0,0003036	0,0018703	0,0076689	0,0229368	0,0528698	0,0970316
	14	0,0000000	0,0000000	0,0000001	0,0000040	0,0000578	0,0004580	0,0023597	0,0087378	0,0247183	0,0554466
	15	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000005	0,0000090	0,0000916	0,0005929	0,0027184	0,0094379	0,0258751
	16	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000011	0,0000147	0,0001197	0,0006796	0,0028957	0,0097032
	17	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000001	0,0000019	0,0000190	0,0001333	0,0006968	0,0028539
	18	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000002	0,0000023	0,0000197	0,0001267	0,0006342
	19	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000002	0,0000021	0,0000164	0,0001001
	20	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000001	0,0000013	0,0000100
	21	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000001	0,0000005

Tabela 31. Poisson-ov raspored verovatnoće

	λ									
x	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
0	0,9048374	0,8187308	0,7408182	0,6703200	0,6065307	0,5488116	0,4965853	0,4493290	0,4065697	0,3678794
1	0,0904837	0,1637462	0,2222455	0,2681280	0,3032653	0,3292870	0,3476097	0,3594632	0,3659127	0,3678794
2	0,0045242	0,0163746	0,0333368	0,0536256	0,0758163	0,0987861	0,1216634	0,1437853	0,1646607	0,1839397
3	0,0001508	0,0010916	0,0033337	0,0071501	0,0126361	0,0197572	0,0283881	0,0383427	0,0493982	0,0613132
4	0,0000038	0,0000546	0,0002500	0,0007150	0,0015795	0,0029636	0,0049679	0,0076685	0,0111146	0,0153283
5	0,0000001	0,0000022	0,0000150	0,0000572	0,0001580	0,0003556	0,0006955	0,0012270	0,0020006	0,0030657
6	0,0000000	0,0000001	0,0000008	0,0000038	0,0000132	0,0000356	0,0000811	0,0001636	0,0003001	0,0005109
7	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000002	0,0000009	0,0000030	0,0000081	0,0000187	0,0000386	0,0000730

	λ									
x	1,10	1,20	1,30	1,40	1.50	1,60	1,70	1,80	1,90	2,00
0	0,3328711	0,3011942	0,2725318	0,2465970	0,2231302	0,2018965	0,1826835	0,1652989	0,1495686	0,1353353
1	0,3661582	0,3614331	0,3542913	0,3452357	0,3346952	0,3230344	0,3105620	0,2975380	0,2841804	0,2706706
2	0,2013870	0,2168598	0,2302894	0,2416650	0,2510214	0,2584275	0,2639777	0,2677842	0,2699714	0,2706706
3	0,0738419	0,0867439	0,0997921	0,1127770	0,1255107	0,1378280	0,1495874	0,1606705	0,1709819	0,1804470
4	0,0203065	0,0260232	0,0324324	0,0394720	0,0470665	0,0551312	0,0635746	0,0723017	0,0812164	0,0902235
5	0,0044674	0,0062456	0,0084324	0,0110521	0,0141200	0,0176420	0,0216154	0,0260286	0,0308622	0,0360894
6	0,0008190	0,0012491	0,0018270	0,0025788	0,0035300	0,0047045	0,0061244	0,0078086	0,0097730	0,0120298
7	0,0001287	0,0002141	0,0003393	0,0005158	0,0007564	0,0010753	0,0014873	0,0020079	0,0026527	0,0034371
8	0,0000177	0,0000321	0,0000551	0,0000903	0,0001418	0,0002151	0,0003161	0,0004518	0,0006300	0,0008593
9	0,0000022	0,0000043	0,0000080	0,0000140	0,0000236	0,0000382	0,0000597	0,0000904	0,0001330	0,0001909

	λ									
x	2,10	2,20	2,30	2,40	2,50	2,60	2,70	2,80	2,90	3,00
0	0,1224564	0,1108032	0,1002588	0,0907180	0,0820850	0,0742736	0,0672055	0,0608101	0,0550232	0,0497871
1	0,2571585	0,2437669	0,2305953	0,2177231	0,2052125	0,1931113	0,1814549	0,1702682	0,1595673	0,1493612
2	0,2700164	0,2681436	0,2651846	0,2612677	0,2565156	0,2510447	0,2449641	0,2383754	0,2313726	0,2240418
3	0,1890115	0,1966387	0,2033082	0,2090142	0,2137630	0,2175721	0,2204677	0,2224837	0,2236602	0,2240418
4	0,0992310	0,1081513	0,1169022	0,1254085	0,1336019	0,1414218	0,1488157	0,1557386	0,1621537	0,1680314
5	0,0416770	0,0475866	0,0537750	0,0601961	0,0668009	0,0735394	0,0803605	0,0872136	0,0940491	0,1008188
6	0,0145870	0,0174484	0,0206138	0,0240784	0,0278337	0,0318671	0,0361622	0,0406997	0,0454571	0,0504094
7	0,0043761	0,0054838	0,0067731	0,0082555	0,0099406	0,0118363	0,0139483	0,0162799	0,0188322	0,0216040
8	0,0011487	0,0015080	0,0019473	0,0024766	0,0031064	0,0038468	0,0047075	0,0056980	0,0068267	0,0081015
9	0,0002680	0,0003686	0,0004976	0,0006604	0,0008629	0,0011113	0,0014123	0,0017727	0,0021997	0,0027005
10	0,0000563	0,0000811	0,0001145	0,0001585	0,0002157	0,0002889	0,0003813	0,0004964	0,0006379	0,0008102
11	0,0000107	0,0000162	0,0000239	0,0000346	0,0000490	0,0000683	0,0000936	0,0001263	0,0001682	0,0002210
12	0,0000019	0,0000030	0,0000046	0,0000069	0,0000102	0,0000148	0,0000211	0,0000295	0,0000406	0,0000552

	λ									
x	**3,10**	**3,20**	**3,30**	**3,40**	**3,50**	**3,60**	**3,70**	**3,80**	**3,90**	**4,00**
0	0,0450492	0,0407622	0,0368832	0,0333733	0,0301974	0,0273237	0,0247235	0,0223708	0,0202419	0,0183156
1	0,4396525	0,1304391	0,1217145	0,1134691	0,1056908	0,0983654	0,0914770	0,0850089	0,0789435	0,0732626
2	0,2164614	0,2087025	0,2008288	0,1928975	0,1849590	0,1770577	0,1692325	0,1615170	0,1539397	0,1465251
3	0,2236768	0,2226160	0,2209117	0,2186172	0,2157855	0,2124693	0,2087201	0,2045882	0,2001217	0,1953668
4	0,1733495	0,1780928	0,1822522	0,1858246	0,1888123	0,1912223	0,1930661	0,1943588	0,1951186	0,1953668
5	0,1074767	0,1139794	0,1202864	0,1263607	0,1321686	0,1376801	0,1428689	0,1477127	0,1521925	0,1562935
6	0,0555296	0,0607890	0,0661575	0,0716044	0,0770983	0,0826081	0,0881025	0,0935513	0,0989251	0,1041956
7	0,0245917	0,0277893	0,0311886	0,0347793	0,0385492	0,0424841	0,0465685	0,0507850	0,0551154	0,0595404
8	0,0095293	0,0111157	0,0128653	0,0147812	0,0168653	0,0191179	0,0215379	0,0241229	0,0268688	0,0297702
9	0,0032823	0,0039523	0,0047173	0,0055840	0,0065587	0,0076471	0,0088545	0,0101852	0,0116431	0,0132312
10	0,0010175	0,0012647	0,0015567	0,0018986	0,0022955	0,0027530	0,0032762	0,0038704	0,0045408	0,0052925
11	0,0002868	0,0003679	0,0004670	0,0005868	0,0007304	0,0009010	0,0011020	0,0013370	0,0016099	0,0019245
12	0,0000741	0,0000981	0,0001284	0,0001663	0,0002130	0,0002703	0,0003398	0,0004234	0,0005232	0,0006415
13	0,0000177	0,0000242	0,0000326	0,0000435	0,0000574	0,0000749	0,0000967	0,0001238	0,0001570	0,0001974
14	0,0000039	0,0000055	0,0000077	0,0000106	0,0000143	0,0000192	0,0000256	0,0000336	0,0000437	0,0000564

	λ									
x	**4,10**	**4,20**	**4,30**	**4,40**	**4,50**	**4,60**	**4,70**	**4,80**	**4,90**	**5,00**
0	0,0165727	0,0149956	0,0135686	0,0122773	0,0111090	0,0100518	0,0090953	0,0082297	0,0074466	0,0067379
1	0,0679480	0,0629814	0,0583448	0,0540203	0,0499905	0,0462384	0,0427478	0,0395028	0,0364883	0,0336897
2	0,1392933	0,1322610	0,1254413	0,1188447	0,1124786	0,1063484	0,1004573	0,0948067	0,0893962	0,0842243
3	0,1903676	0,1851654	0,1797992	0,1743055	0,1687179	0,1630676	0,1573832	0,1516907	0,1460138	0,1403739
4	0,1951267	0,1944237	0,1932842	0,1917360	0,1898076	0,1875277	0,1849252	0,1820288	0,1788670	0,1754674
5	0,1600039	0,1633159	0,1662244	0,1687277	0,1708269	0,1725255	0,1738297	0,1747477	0,1752896	0,1754674
6	0,1093360	0,1143211	0,1191275	0,1237337	0,1281201	0,1322696	0,1361666	0,1397981	0,1431532	0,1462228
7	0,0640397	0,0685927	0,0731783	0,0777754	0,0823629	0,0869200	0,0914261	0,0958616	0,1002072	0,1044449
8	0,0328203	0,0360111	0,0393333	0,0427765	0,0463292	0,0499790	0,0537129	0,0575170	0,0613769	0,0652780
9	0,0149515	0,0168052	0,0187926	0,0209130	0,0231646	0,0255448	0,0280500	0,0306757	0,0334163	0,0362656
10	0,0061301	0,0070582	0,0080808	0,0092017	0,0104241	0,0117506	0,0131835	0,0147243	0,0163740	0,0181328
11	0,0022849	0,0026949	0,0031589	0,0036807	0,0042644	0,0049139	0,0056330	0,0064252	0,0072939	0,0082422
12	0,0007807	0,0009432	0,0011319	0,0013496	0,0015991	0,0018837	0,0022062	0,0025701	0,0029783	0,0034342
13	0,0002462	0,0003047	0,0003744	0,0004568	0,0005536	0,0006665	0,0007976	0,0009489	0,0011226	0,0013209
14	0,0000721	0,0000914	0,0001150	0,0001436	0,0001779	0,0002190	0,0002678	0,0003254	0,0003929	0,0004717
15	0,0000197	0,0000256	0,0000330	0,0000421	0,0000534	0,0000672	0,0000839	0,0001041	0,0001284	0,0001572

	λ									
x	**5,10**	**5,20**	**5,30**	**5,40**	**5,50**	**5,60**	**5,70**	**5,80**	**5,90**	**6,00**
0	0,0060967	0,0055166	0,0049916	0,0045166	0,0040868	0,0036979	0,0033460	0,0030276	0,0027394	0,0024788
1	0,0310934	0,0286861	0,0264554	0,0243895	0,0224772	0,0207080	0,0190720	0,0175598	0,0161627	0,0148725
2	0,0792882	0,0745840	0,0701069	0,0658518	0,0618124	0,0579825	0,0543552	0,0509235	0,0476800	0,0446175
3	0,1347899	0,1292788	0,1238556	0,1185332	0,1133228	0,1082340	0,1032749	0,0984520	0,0937707	0,0892351
4	0,1718571	0,1680625	0,1641087	0,1600198	0,1558188	0,1515276	0,1471667	0,1427555	0,1383118	0,1338526
5	0,1752943	0,1747850	0,1739552	0,1728213	0,1714007	0,1697109	0,1677701	0,1655963	0,1632080	0,1606231
6	0,1490001	0,1514803	0,1536604	0,1555392	0,1571173	0,1583969	0,1593816	0,1600765	0,1604878	0,1606231
7	0,1085573	0,1125282	0,1163429	0,1199874	0,1234493	0,1267175	0,1297821	0,1326348	0,1352683	0,1376770
8	0,0692052	0,0731434	0,0770772	0,0809915	0,0848714	0,0887022	0,0924698	0,0961602	0,0997604	0,1032577
9	0,0392163	0,0422606	0,0453899	0,0485949	0,0518659	0,0551925	0,0585642	0,0619699	0,0653985	0,0688385
10	0,0200003	0,0219755	0,0240566	0,0262412	0,0285262	0,0309078	0,0333816	0,0359426	0,0385851	0,0413031
11	0,0092729	0,0103884	0,0115909	0,0128821	0,0142631	0,0157349	0,0172977	0,0189515	0,0206956	0,0225290
12	0,0039410	0,0045017	0,0051193	0,0057969	0,0065373	0,0073429	0,0082164	0,0091599	0,0101754	0,0112645
13	0,0015461	0,0018007	0,0020871	0,0024080	0,0027658	0,0031631	0,0036026	0,0040867	0,0046180	0,0051990
14	0,0005632	0,0006688	0,0007901	0,0009288	0,0010865	0,0012652	0,0014668	0,0016931	0,0019462	0,0022281
15	0,0001915	0,0002319	0,0002792	0,0003344	0,0003984	0,0004724	0,0005574	0,0006547	0,0007655	0,0008913

	λ									
x	6,10	6,20	6,30	6,40	6,50	6,60	6,70	6,80	6,90	7,00
0	0,0022429	0,0020294	0,0018363	0,0016616	0,0015034	0,0013604	0,0012309	0,0011138	0,0010078	0,0009119
1	0,0136815	0,0125825	0,0115687	0,0106340	0,0097724	0,0089784	0,0082471	0,0075737	0,0069537	0,0063832
2	0,0417286	0,0390057	0,0364415	0,0340287	0,0317602	0,0296288	0,0276278	0,0257505	0,0239903	0,0223411
3	0,0848481	0,0806117	0,0765271	0,0725945	0,0688137	0,0651834	0,0617021	0,0583678	0,0551778	0,0521293
4	0,1293933	0,1249481	0,1205302	0,1161513	0,1118222	0,1075526	0,1033511	0,0992252	0,0951816	0,0912262
5	0,1578598	0,1549357	0,1518680	0,1486736	0,1453689	0,1419694	0,1384904	0,1349463	0,1313507	0,1277167
6	0,1604908	0,1601002	0,1594614	0,1585852	0,1574829	0,1561664	0,1546476	0,1529391	0,1510533	0,1490028
7	0,1398563	0,1418030	0,1435153	0,1449922	0,1462342	0,1472426	0,1480199	0,1485694	0,1488954	0,1490028
8	0,1066404	0,1098973	0,1130183	0,1159937	0,1188153	0,1214751	0,1239667	0,1262840	0,1284223	0,1303774
9	0,0722785	0,0757071	0,0791128	0,0824844	0,0858110	0,0890818	0,0922863	0,0954146	0,0984571	0,1014047
10	0,0440899	0,0469384	0,0498411	0,0527900	0,0557772	0,0587940	0,0618318	0,0648819	0,0679354	0,0709833
11	0,0244498	0,0264562	0,0285453	0,0307142	0,0329592	0,0352764	0,0376612	0,0401088	0,0426140	0,0451712
12	0,0124287	0,0136690	0,0149863	0,0163809	0,0178529	0,0194020	0,0210275	0,0227283	0,0245031	0,0263498
13	0,0058319	0,0065191	0,0072626	0,0080644	0,0089265	0,0098503	0,0108372	0,0118887	0,0130055	0,0141884
14	0,0025410	0,0028870	0,0032682	0,0036866	0,0041444	0,0046437	0,0051864	0,0057745	0,0064098	0,0070942
15	0,0010334	0,0011933	0,0013726	0,0015730	0,0017959	0,0020432	0,0023166	0,0026178	0,0029485	0,0033106
16	0,0003940	0,0004624	0,0005405	0,0006292	0,0007296	0,0008428	0,0009701	0,0011126	0,0012716	0,0014484
17	0,0001414	0,0001686	0,0002003	0,0002369	0,0002790	0,0003272	0,0003823	0,0004450	0,0005161	0,0005964
18	0,0000479	0,0000581	0,0000701	0,0000842	0,0001007	0,0001200	0,0001423	0,0001681	0,0001978	0,0002319
19	0,0000154	0,0000190	0,0000232	0,0000284	0,0000345	0,0000417	0,0000502	0,0000602	0,0000718	0,0000854

	λ									
x	7,10	7,20	7,30	7,40	7,50	7,60	7,70	7,80	7,90	8,00
0	0,0008251	0,0007466	0,0006755	0,0006113	0,0005531	0,0005005	0,0004528	0,0004097	0,0003707	0,0003355
1	0,0058582	0,0053754	0,0049314	0,0045233	0,0041481	0,0038034	0,0034868	0,0031959	0,0029289	0,0026837
2	0,0207968	0,0193515	0,0179997	0,0167361	0,0155555	0,0144530	0,0134241	0,0124641	0,0115691	0,0107348
3	0,0492190	0,0464436	0,0437993	0,0412824	0,0388887	0,0366144	0,0344551	0,0324068	0,0304652	0,0286261
4	0,0873638	0,0835985	0,0799338	0,0763724	0,0729164	0,0695673	0,0663261	0,0631932	0,0601687	0,0572523
5	0,1240565	0,1203818	0,1167034	0,1130312	0,1093746	0,1057423	0,1021421	0,0985814	0,0950666	0,0916037
6	0,1468002	0,1444582	0,1419891	0,1394051	0,1367182	0,1339402	0,1310824	0,1281558	0,1251710	0,1221382
7	0,1488974	0,1485856	0,1480743	0,1473711	0,1464838	0,1454208	0,1441906	0,1428021	0,1412644	0,1395865
8	0,1321464	0,1337270	0,1351178	0,1363183	0,1373286	0,1381498	0,1387835	0,1392321	0,1394986	0,1395865
9	0,1042489	0,1069816	0,1095956	0,1120839	0,1144405	0,1166598	0,1187370	0,1206678	0,1224488	0,1240769
10	0,0740167	0,0770268	0,0800048	0,0829421	0,0858304	0,0886614	0,0914275	0,0941209	0,0967345	0,0992615
11	0,0477744	0,0504175	0,0530941	0,0557974	0,0585207	0,0612570	0,0639992	0,0667403	0,0694730	0,0721902
12	0,0282665	0,0302505	0,0322989	0,0344084	0,0365754	0,0387961	0,0410662	0,0433812	0,0457364	0,0481268
13	0,0154379	0,0167541	0,0181371	0,0195863	0,0211012	0,0226808	0,0243238	0,0260287	0,0277936	0,0296165
14	0,0078292	0,0086164	0,0094572	0,0103528	0,0113042	0,0123124	0,0133781	0,0145017	0,0156836	0,0169237
15	0,0037058	0,0041359	0,0046025	0,0051074	0,0056521	0,0062383	0,0068674	0,0075409	0,0082600	0,0090260
16	0,0016445	0,0018611	0,0020999	0,0023622	0,0026494	0,0029632	0,0033049	0,0036762	0,0040784	0,0045130
17	0,0006868	0,0007882	0,0009017	0,0010282	0,0011689	0,0013247	0,0014969	0,0016867	0,0018952	0,0021238
18	0,0002709	0,0003153	0,0003657	0,0004227	0,0004870	0,0005593	0,0006404	0,0007309	0,0008318	0,0009439
19	0,0001012	0,0001195	0,0001405	0,0001646	0,0001922	0,0002237	0,0002595	0,0003001	0,0003459	0,0003974
20	0,0000359	0,0000430	0,0000513	0,0000609	0,0000721	0,0000850	0,0000999	0,0001170	0,0001366	0,0001590
21	0,0000122	0,0000147	0,0000178	0,0000215	0,0000257	0,0000308	0,0000366	0,0000435	0,0000514	0,0000606

x	8,10	8,20	8,30	8,40	8,50	8,60	8,70	8,80	8,90	9,00
0	0,0003035	0,0002747	0,0002485	0,0002249	0,0002035	0,0001841	0,0001666	0,0001507	0,0001364	0,0001234
1	0,0024587	0,0022522	0,0020627	0,0018889	0,0017295	0,0015833	0,0014493	0,0013265	0,0012139	0,0011107
2	0,0099576	0,0092339	0,0085602	0,0079333	0,0073503	0,0068082	0,0063044	0,0058364	0,0054017	0,0049981
3	0,0268855	0,0252392	0,0236831	0,0222133	0,0208258	0,0195169	0,0182829	0,0171201	0,0160250	0,0149943
4	0,0544432	0,0517404	0,0491425	0,0466479	0,0442549	0,0419614	0,0397653	0,0376641	0,0356556	0,0337372
5	0,0881980	0,0848542	0,0815765	0,0783685	0,0752333	0,0721736	0,0691915	0,0662889	0,0634670	0,0607269
6	0,1190672	0,1159674	0,1128475	0,1097159	0,1065806	0,1034488	0,1003277	0,0972237	0,0941427	0,0910903
7	0,1377778	0,1358475	0,1338049	0,1316591	0,1294192	0,1270943	0,1246930	0,1222241	0,1196957	0,1171161
8	0,1395000	0,1392437	0,1388225	0,1382420	0,1375079	0,1366264	0,1356037	0,1344465	0,1331615	0,1317556
9	0,1255500	0,1268665	0,1280252	0,1290259	0,1298686	0,1305541	0,1310836	0,1314588	0,1316819	0,1317556
10	0,1016955	0,1040305	0,1062609	0,1083818	0,1103883	0,1122765	0,1140427	0,1156837	0,1171969	0,1185801
11	0,0748849	0,0775500	0,0801787	0,0827642	0,0853001	0,0877798	0,0901974	0,0925470	0,0948230	0,0970201
12	0,0505473	0,0529925	0,0554569	0,0579350	0,0604209	0,0629089	0,0653931	0,0678678	0,0703270	0,0727650
13	0,0314949	0,0334260	0,0354071	0,0374349	0,0395060	0,0416166	0,0437631	0,0459413	0,0481470	0,0503758
14	0,0182220	0,0195781	0,0209914	0,0224609	0,0239858	0,0255645	0,0271956	0,0288774	0,0306077	0,0323844
15	0,0098399	0,0107027	0,0116152	0,0125781	0,0135919	0,0146570	0,0157735	0,0169414	0,0181606	0,0194307
16	0,0049814	0,0054851	0,0060254	0,0066035	0,0072207	0,0078781	0,0085768	0,0093178	0,0101018	0,0109297
17	0,0023735	0,0026458	0,0029418	0,0032629	0,0036104	0,0039854	0,0043893	0,0048233	0,0052886	0,0057863
18	0,0010681	0,0012053	0,0013565	0,0015227	0,0017049	0,0019041	0,0021215	0,0023581	0,0026149	0,0028932
19	0,0004553	0,0005202	0,0005926	0,0006732	0,0007627	0,0008619	0,0009714	0,0010922	0,0012249	0,0013704
20	0,0001844	0,0002133	0,0002459	0,0002827	0,0003242	0,0003706	0,0004226	0,0004805	0,0005451	0,0006167
21	0,0000711	0,0000833	0,0000972	0,0001131	0,0001312	0,0001518	0,0001751	0,0002014	0,0002310	0,0002643
22	0,0000262	0,0000310	0,0000367	0,0000432	0,0000507	0,0000593	0,0000692	0,0000805	0,0000935	0,0001081

	λ									
x	9,10	9,20	9,30	9,40	9,50	9,60	9,70	9,80	9,90	10,00
0	0,0001117	0,0001010	0,0000914	0,0000827	0,0000749	0,0000677	0,0000613	0,0000555	0,0000502	0,0000454
1	0,0010162	0,0009296	0,0008502	0,0007776	0,0007111	0,0006502	0,0005944	0,0005434	0,0004967	0,0004540
2	0,0046235	0,0042760	0,0039536	0,0036547	0,0033777	0,0031209	0,0028831	0,0026628	0,0024588	0,0022700
3	0,0140247	0,0131130	0,0122563	0,0114515	0,0106960	0,0099870	0,0093220	0,0086984	0,0081141	0,0075667
4	0,0319062	0,0301600	0,0284959	0,0269111	0,0254030	0,0239688	0,0226058	0,0213112	0,0200823	0,0189166
5	0,0580692	0,0554943	0,0530023	0,0505929	0,0482658	0,0460201	0,0438552	0,0417699	0,0397630	0,0378333
6	0,0880716	0,0850913	0,0821536	0,0792623	0,0764208	0,0736322	0,0708992	0,0682241	0,0656090	0,0630555
7	0,1144931	0,1118343	0,1091469	0,1064379	0,1037139	0,1009813	0,0982461	0,0955138	0,0927898	0,0900792
8	0,1302359	0,1286094	0,1268833	0,1250645	0,1231603	0,1211776	0,1191233	0,1170044	0,1148274	0,1125990
9	0,1316830	0,1314674	0,1311127	0,1306230	0,1300025	0,1292561	0,1283885	0,1274048	0,1263102	0,1251100
10	0,1198315	0,1209500	0,1219348	0,1227856	0,1235024	0,1240859	0,1245368	0,1248567	0,1250471	0,1251100
11	0,0991334	0,1011582	0,1030904	0,1049259	0,1066612	0,1082931	0,1098188	0,1112360	0,1125424	0,1137364
12	0,0751761	0,0775546	0,0798950	0,0821919	0,0844401	0,0866345	0,0887702	0,0908427	0,0928475	0,0947803
13	0,0526233	0,0548848	0,0571557	0,0594311	0,0617062	0,0639762	0,0662363	0,0684814	0,0707069	0,0729079
14	0,0342051	0,0360672	0,0379677	0,0399037	0,0418721	0,0438694	0,0458923	0,0479370	0,0499999	0,0520771
15	0,0207511	0,0221212	0,0235400	0,0250063	0,0265190	0,0280764	0,0296770	0,0313188	0,0329999	0,0347181
16	0,0118022	0,0127197	0,0136826	0,0146912	0,0157456	0,0168459	0,0179917	0,0191828	0,0204187	0,0216988
17	0,0063176	0,0068836	0,0074852	0,0081234	0,0087990	0,0095130	0,0102658	0,0110583	0,0118909	0,0127640
18	0,0031939	0,0035183	0,0038673	0,0042422	0,0046439	0,0050736	0,0055321	0,0060206	0,0065400	0,0070911
19	0,0015297	0,0017036	0,0018930	0,0020988	0,0023220	0,0025635	0,0028243	0,0031054	0,0034077	0,0037322
20	0,0006960	0,0007837	0,0008802	0,0009864	0,0011029	0,0012305	0,0013698	0,0015216	0,0016868	0,0018661
21	0,0003016	0,0003433	0,0003898	0,0004415	0,0004989	0,0005625	0,0006327	0,0007101	0,0007952	0,0008886
22	0,0001248	0,0001436	0,0001648	0,0001887	0,0002155	0,0002455	0,0002790	0,0003163	0,0003578	0,0004039
23	0,0000494	0,0000574	0,0000666	0,0000771	0,0000890	0,0001025	0,0001177	0,0001348	0,0001540	0,0001756
24	0,0000187	0,0000220	0,0000258	0,0000302	0,0000352	0,0000410	0,0000476	0,0000550	0,0000635	0,0000732

LITERATURA

1. Anderson, D., Sweeney, D., Williams, T., Camm, J., Cochran, J., 2015. *Statistics for Business & Economics, 12th Edition,* Cengage Learning, USA.

2. Anderson, D., Sweeney, D., Williams, T., 2011. *Statistics for business and economics, 11 th Edition,* Cengage Learning, USA.

3. Anderson, D., Sweeney, D., Williams, T., Freeman, J., Shoesmith, E., 2010. *Statistics for business and economics*, 2nd Edition, South-Western Cengage Learning, USA.

4. Barrow, M., 2006. *Statistics for Economics, Accounting and Business Studies*, 4th *Edition*, Prentice Hall, England.

5. Bary, G. C. 2010. *Business statistics, 3rd Edition,* Tata McGraw-Hill Education, New Delhi.

6. Berenson, M., Levine, M., Krehbiel, T., 2011. *Basic Business Statistics: Concepts and Applications,* 12th edition, Prentice Hall, New Jersey.

7. Bradley, T., 2007. *Essential Statistics for Economics, Business and Management*, John Wiley & Sons, England.

8. Dolasci domaćih turista na području Južne i Istočne Srbije u periodu od 2012-2015. godine, dostupno na: http://webrzs.stat.gov.rs/website/public/ReportView.aspx, [20.06.2016. u 15:00]

9. Domaćinstva prema broju članova po naseljima, popis 2011., dostupno na: http://popis2011.stat.rs/?page_id=2162, [09.02.2016. u 18:00]

10. Đorđevic, V., 2006. *Statistika u ekonomiji*, Ekonomski fakultet, Niš.

11. John, V., decembar 1883. “The Term "Statistics”, *Journal of the Statistical Society of London*, Vol. 46, No. 4.

12. Keller, G., 2014. *Statistics for Management and Economics, 10 th* Edition, Cengage Learning, USA.

13. Kirchgässner, G., Wolters, J., Hassle, U., 2013. *Introduction to Modern Time Series Analysis*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Germany.

14. Kovačević, Kostić, I., 2015. *Verovatnoća i statistika*, Univerzitet Singidunum, Beograd.

15. Kovačić, Z., 1995. *Analiza vremenskih serija*, Ekonomski fakultet, Beograd.

16. Kuebler, C., Mackie, C., 2006. *Improving Business Statistics Through Interagency Data Sharing : Summary of a Workshop*, National Research Council, USA.

17. Lovrić, M., 2008. *Osnovi statistike*, Ekonomski fakultet, Kragujevac.

18. Mann, P., 2009. *Uvod u statistiku,* Ekonomski fakultet, Beograd.

19. Marjanović, M., Spasić, K. 2015. *Poslovna statistika*, Visoka poslovna škola strukovnih studija, Leskovac.

20. Mladenović, D., Đolević, V., Šoškić, D., 2008. *Ekonomska statistika*, Ekonomski fakultet u Beogradu, Beograd.

21. Newbold, P., Carlson, W., Thorne, B., 2010. *Statistika za poslovanje i ekonomiju*, Mate, Zagreb.

22. Oficijalne šeme finansijskih izveštaja preduzeća "Soko Štark" za 2008., 2009., 2010. i 2011. godinu, dostupno na: www.apr.gov.rs, [02.01.2016. u 18:00]

23. Pallant, J., 2009. *SPSS Priručnik za preživljavanje, Prevod 3. izdanja,* Mikro knjiga, Beograd.

24. Pejčić, D. mart, 2007. „Kalkulacija izvozne cene", *Exporter*,. Agencija za strana ulaganja i promociju izvoza, Beograd.

25. Peña, D., Tiao, G., Tsay, R., 2001. *A Course in Time Series Analysis*, John Wiley & Sons, New York.

26. Petrović, Lj., 2015. *Teorijska statistika – Teorija statističkog zaključivanja*, Ekonomski fakultet u Beogradu, Beograd.

27. Popis poljoprivrede 2012. godine „Vinski atlas", 2015. Beograd, dostupno na: http://webrzs.stat.gov.rs/WebSite/userFiles/file/Poljoprivreda/Knjige/VinskiAtlas.pdf, [09.02.2016. u 18:00]

28. Preduzeća u Republici Srbiji prema veličini, 2010., *Republički zavod za statistiku, Beograd, Republika Srbija,* avgust, 2011. Godine, str. 6., dostupno na: http://pod2.stat.gov.rs/ObjavljenePublikacije/G2011/pdf/G201110077.pdf, [10.02.2016. u 18:00]

29. Ramachandran, K., Tsokos, C., 2009. *Mathematical Statistics with Applications*, Elsevier Academic Press, USA.

30. Sahoo, P., 2013. *Probability and mathematical statistics,* University of Louisville, USA.

31. Siegel, A., 2012. *Practical Business Statistics*, 6th *Edition*, Elsevier Inc., USA.

32. Stanovništvo prema starosti i polu u Republici Srbiji 2011. godine, dostupno na: http://popis2011.stat.rs/?page_id=2162, [09.02.2016. u 18:00]

33. Statistički letopis Državnog zavoda za statistiku Republike Hrvatske (2012. I 2013.), dostupno na: http://www.dzs.hr/Hrv_Eng/ljetopis/2012/sljh2012.pdf; http://www.dzs.hr/Hrv_Eng/ljetopis/2013/sljh2013.pdf, [04.06.2016. u 18:00]

34. Stojković, M., 1995. Statistika za menadžere, Ekonomski fakultet u Subotici, Subotica.

35. Šekarić, M., 2010. *Statističke metode*, Univerzitet Singidunum, Beograd.

36. Šekularac, G., 1994. „Trend navodnjavanih površina na području melioracionog sistema Čačak”, *Poljoprivreda i šumarstvo,* Vol. 40, (1-4), Biotehnički fakultet, Univerzitet Crne Gore, Podgorica, str. 33-36., dostupno na: http://89.188.43.75/agricultforest/20120216-04%20Sekularac.pdf, [13.06.2016. u 21:00]

37. Tabachnik, G., Fidell, S., 2007. *Using multivariate statistics,* Pearson/Allyn & Bacon, Boston.

38. Tešić, M. 1996. *Spoljnotrgovinsko poslovanje*, Savremena administracija, Beograd.

39. Turjačanin, V., Čekrlija, Đ., 2006. *Osnovne statističke metode i tehnike u SPSS-u*, Centar za kulturni i socijalni popravak, Banja Luka.

40. United Nations Conference on Trade and Development, World Investment Report 2013 / 2012 / 2011 / 2010. http://www.unctad.org/en/PublicationsLibrary/wir2013_en.pdf; http://unctad.org/en/PublicationsLibrary/wir2012_embargoed_en.pdf; http://unctad.org/en/PublicationsLibrary/wir2011_en.pdf; http://www.unctad.org/en/Docs/wir2010_en.pdf., [09.03.2016. u 18:00]

41. Uporedni pregled broja stanovnika 1948, 1953, 1961, 1971, 1981, 1991, 2002 i 2011. godine i uporedni pregled broja domaćinstava 1948-2011 i stanova 1971-2011., dostupno na: http://popis2011.stat.rs/?page_id=2162, [09.02.2016. u 18:00]

42. Unković, M. Stakić, B., 2011. *Spoljnotrgovinsko i devizno poslovanje,* Singidunum, Beograd.

43. Vuković, N., Spasić, S., 2011. *Statistika za inžinjere*, Univerzitet Singidunum, Beograd.

44. Wilcox, R., 2009. *Basic Statistics: Understanding Conventional Methods and Modern Insights*, Oxford University Press, New York.

45. Weiers, R., 2008. *Introduction to Business Statistics, 6th Edition,* Thomson South-Western, USA.

46. Yaffee, R., McGee, M., 2000. *Introduction to Time Series Analysis and Forecasting: With Applications of SAS and SPSS*, Acad. Press, San Diego, California.

CIP - Каталогизација у публикацији -
Народна библиотека Србије, Београд

311:33(075.8)(076)

МАРЈАНОВИЋ, Милена, 1960-
Statistika u ekonomiji i poslovanju sa zbirkom rešenih zadataka /
Milena Marjanović, Ivan Mihailović, Kristina Spasić. - Leskovac : Visoka
poslovna škola strukovnih studija, 2016 (Niš : Scero-print). - 311 str. :
graf. prikazi, tabele ; 24 cm

Tiraž 160. - Napomene i bibliografske reference uz tekst. - Bibliografija:
str. 309-311.

ISBN 978-86-84331-60-3
1. Михаиловић, Иван, 1963- [аутор] 2. Спасић, Кристина, 1981- [аутор]
а) Економска статистика
COBISS.SR-ID 227376140

Visoka poslovna škola strukovnih studija Leskovac
Vlade Jovanovića 8, 16000 Leskovac
e-mail: mail@vpsle.edu.rs, http://www.vpsle.edu.rs
tel.: +381 16 254 961, faks: +381 16 242 536

The publication has been funded within the freamework of the European Union Tempus programme which is funded by the Directorate General for Development and Co-operation - Europe Aid and the Directorate General for Enlargement.

This publication reflests the views only of the authors, and the Education, Audiovisual and Culture Executive Agency and the European Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information therein.

Projest No. 544543 - TEMPUS - 1-2013-1-RS-TEMPUS-JPCR